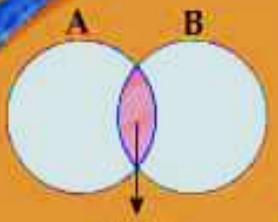
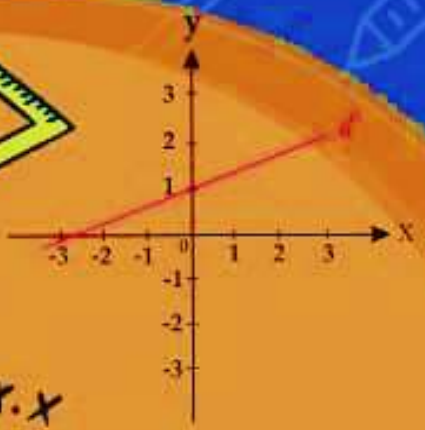
همراه با درسنامه





$X^2 = X.X$

ریاضی نهم

- نکات و توضیحات کتاب ریاضی
- پایه نهم
- دوره اول متوسطه
- گروه آموزشی ریاضی متوسطه اول استان خوزستان

فصل ۶: خط و معادله های خطی

مدرسه تعطیل است ولی آموزش تعطیل نیست.

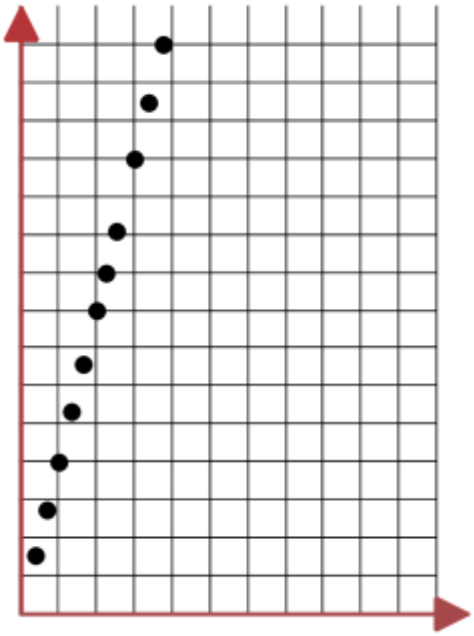
بسمه تعالی

درسنامه و نکات کلیدی و حل تمرینات فصل ششم پایه نهم – ندا بهرامی نیا

درس اول : معادله خط

به رابطه ی بین ضلع مربع و محیط آن توجه کنید:

x	...	$\frac{۲}{۵}$	۷	۲/۱	۳	طول ضلع
$۴x$	...	$\frac{۸}{۵}$	۲۸	۸/۴	۱۲	محیط



اگر اندازه ی ضلع مربع را روی محور طول ها(x ها) و محیط آن را روی محور عرض ها(y ها) نمایش دهیم با پیدا کردن نقاطی مانند جدول بالا که در آن ها عرضشان چهاربرابر طول یا به عبارتی دیگر $y = ۴x$ باشد نموداری به فرم مقابل ترسیم می شود:

ویژگی همه ی این نقاط این است که عرض آن ها چهار برابر طولشان است در واقع تمامی نقاط پاسخ هایی مناسب برای معادله ی $y = ۴x$ هستند. هرچه تعداد پاسخ های بیشتری برای این معادله بیابیم نمودار رسم شده بیشتر شبیه به یک خط راست خواهد بود.

نکته: معادله ی خط رابطه ای است که بین نقاط تشکیل دهنده ی آن خط وجود دارد.

مثال: برای معادله ی $x - y = ۵$ سه پاسخ مناسب بنویسید.

پاسخ: این معادله بی شمار پاسخ درست دارد. چون معادله دو متغیر دارد به یکی از آن ها یک مقدار دلخواه می دهیم و متغیر دیگر را با حل معادله ی معمولی محاسبه می کنیم.

۱) فرض کنیم $x = ۱$ پس : $۱ - y = ۵ \quad \Rightarrow -y = ۵-۱=۴ \quad \Rightarrow y = -۴$

بنابراین $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۴ \end{bmatrix}$ یک پاسخ برای این معادله است.(توجه داشته باشید که در مختصات داده شد عدد۱ طول یا x و عدد ۴- عرض یا y است.)

۲) اگر $y = ۱$ پس : $x - ۱ = ۵ \Rightarrow x = ۵+۱=۶$ بنابراین $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۱ \end{bmatrix}$ نیز یک پاسخ برای این معادله است.

۳) اگر $y = ۰$ پس : $x - ۰ = ۵ \Rightarrow x = ۵$ بنابراین $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۰ \end{bmatrix}$ نیز یک پاسخ برای این معادله است.

دقت کنیم رابطه $x - y = ۵$ اتحاد نیست چون به طور مثال برای $x = ۳$ و $y = ۳$ رابطه درست نیست. (زیرا $۳-۳=۰ \neq ۵$)

نکته: با توجه به مثال داده شده، برای ترسیم یک خط با داشتن معادله ی آن کافی است دو پاسخ درست برای آن معادله به دست آورد. و خطی که از آن دو نقطه می گذرد را ترسیم کرد. (دقت کنید از دو نقطه ی متفاوت فقط یک خط راست می گذرد)

نکته : هر معادله به فرم $y = ax + b$ معادله ی یک خط است.

مثال: خط های زیر را ترسیم کنید.

الف) $y = ۲x + ۱$

پاسخ: ابتدا دو پاسخ درست برای این معادله به دست می آوریم. برای راحتی در محاسبات و نمایش بهتر در صفحه ی مختصات بهتر است از اعداد کوچک استفاده کنیم.

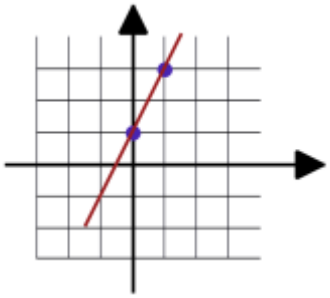
اگر $x = ۰$: $y=۲(۰)+۱=۱$ پس $\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$ یک پاسخ برای این معادله است.

اگر $x = ۱$: $y=۲(۱)+۱=۳$ پس $\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix}$ یک پاسخ دیگر برای این معادله است.

مطالب بالا را می توان در جدولی به فرم مقابل خلاصه کرد:

x	۰	۱
y	$۲(۰)+۱=۱$	$۲(۱)+۱=۳$
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix}$

حال کافی است در صفحه ی مختصات (مانند صفحه ی مقابل) این دو نقطه را نمایش داد و خط گذرنده از آن ها را رسم کرد:



ب) $y = \frac{۲}{۵}x + ۱$

پاسخ: ابتدا دو پاسخ درست برای این معادله به دست می آوریم. برای راحتی در محاسبات و نمایش بهتر در صفحه ی مختصات بهتر است به **x** مقادیر صفر و ۵ بدهیم تا محاسبات کسری نداشته باشیم.

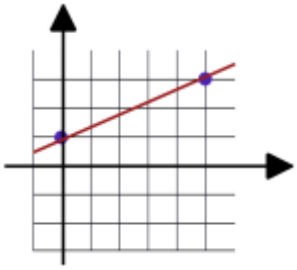
اگر $x = ۰$: $y=\frac{۲}{۵}(۰)+۱=۱$ پس $\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$ یک پاسخ برای این معادله است.

اگر $x = ۵$: $y=\frac{۲}{۵}(۵)+۱=۲+۱=۳$ پس $\begin{bmatrix}۵\\۳\end{bmatrix}$ پاسخ دیگر این معادله است.

مطالب بالا را می توان در جدولی به فرم مقابل خلاصه کرد:

x	۰	۵
y	۱	۳
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}۵\\۳\end{bmatrix}$

حال کافی است در صفحه ی مختصات (مانند صفحه ی مقابل) این دو نقطه را نمایش داد و خط گذرنده از آن ها را رسم کرد:



نکته: شرط آن که نقطه ای روی خط قرار داشته باشد این است که طول و عرض نقطه در معادله ی خط صدق کند.

مثال) نقطه ی $\begin{bmatrix}۳\\-۱\end{bmatrix}$ روی خط $۲x + ۳y = ۴$ قرار ندارد زیرا: $۲(۳) + ۳(-۱) = ۳ \neq ۴$

مثال) نقطه ی $\begin{bmatrix}۲\\-۵\end{bmatrix}$ روی خط $۲x + y = -۱$ قرار دارد زیرا: $۲(۲) + (-۵) = -۱$

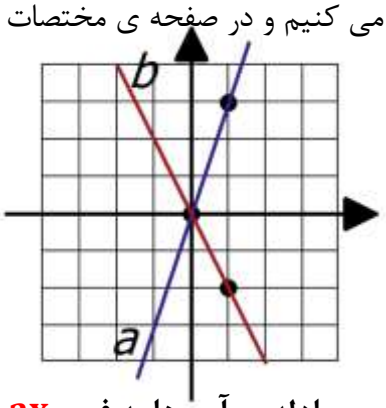
مثال) نقطه ی $\begin{bmatrix}۱\\-۳\end{bmatrix}$ روی خط $y = -۲x - ۲$ قرار ندارد زیرا: $-۲(۱) - ۲ = -۴ \neq -۳$

نکته: برای رسم هر خط کافی است مختصات دو نقطه از آن خط را تعیین و به هم وصل کرد.

مثال) خط های $b: y = -۲x$ و $a: y = ۳x$ را در یک صفحه ی مختصات رسم کنید.

پاسخ: مانند مثال های قبل جدول ها را کامل می کنیم و در صفحه ی مختصات دو نقطه را مشخص و خط گذرنده از آن ها را رسم می کنیم.

x	۰	۱
$y = -۲x$	$-۲(۰)=۰$	$-۲(۱)=-۲$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$



x	۰	۱
$y = ۳x$	$۳(۰)=۰$	$۳(۱)=۳$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$

هر دو خط بالا از مبداء مختصات می گذرند و معادله ی آن ها به فرم $y = ax$ است. پس:

نکته: فرم کلی معادله ی خطوط مبداء گذر به فرم $y = ax$ است.

سوال۱: آیا نقطه ی $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ روی خط $y = x + ۳$ قرار دارد؟ چرا؟

پاسخ: بررسی می کنیم آیا بین طول و عرض نقطه ی $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ رابطه ی $y = x + ۳$ برقرار است؟به y مقدار ۲- و به x مقدار ۱ می دهیم و تساوی را بررسی می کنیم:

$$y = x + ۳$$
$$-۲ \neq ۱ + ۳$$

چون تساوی برقرار نیست بنابراین نقطه روی خط قرار ندارد.

سوال۲: مختصات نقطه ای از خط $y = -۲x - ۱$ را تعیین کنید که عرض آن ۷- باشد.

پاسخ: دقت کنیم: $y = -۷$ بنابراین در معادله ی خط به جای y مقدار ۷- می دهیم و معادله را برای به دست آوردن x (طول) حل می کنیم: $y = -۲x - ۱ \Rightarrow -۷=-۲x-۱ \Rightarrow ۲x=۷-۱=۶ \Rightarrow x=\frac{۶}{۲}=۳$

بنابراین مختصات نقطه ی مورد نظر $\begin{bmatrix} ۳ \\ -۷ \end{bmatrix}$ است.

سوال ۳: مختصات محل برخورد خط $y = ۲x + ۴$ با محورهای مختصات را به دست آورید.

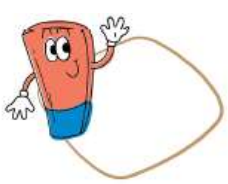
پاسخ: مختصات نقطه ای که روی محور طول ها قرار دارد به صورت $\begin{bmatrix} a \\ ۰ \end{bmatrix}$ و

مختصات نقطه ای که روی محور عرض هاست به صورت $\begin{bmatrix} ۰ \\ b \end{bmatrix}$ است

بنابراین برای پیدا کردن مختصاتش به طول یا عرض آن مقدار صفر می دهیم و معادله را برای پیداکردن متغیر دیگر حل می کنیم:

الف) محل برخورد با طول ها ($y = ۰$): $[\ y = ۲x + ۴ \Rightarrow ۰=۲x+۴ \Rightarrow -۲x=۴ \Rightarrow x=\frac{۴}{-۲} = -۲\ ]$ نقطه ی $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$

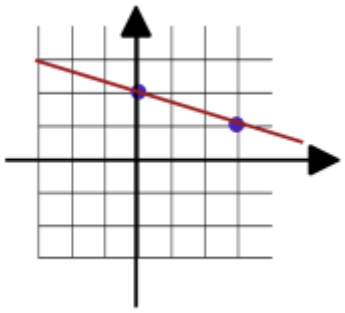
ب) محل برخورد با عرض ها ($x = ۰$): $[\ y = ۲x + ۴ \Rightarrow y=۲(۰)+۴=۰+۴=۴\ ]$ نقطه ی $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix}$



سوال ۴: خط $y = -\frac{۱}{۳}x + ۲$ را در صفحه ی مختصات رسم کنید.

پاسخ: برای رسم خط به x دو مقدار دلخواه می دهیم(برای راحتی محاسبات عدد ۳ که با مخرج ۳ساده شود) و معادله را برای پیدا کردن y حل می کنیم.

x	۰	۳
$y = -\frac{۱}{۳}x + ۲$	$-\frac{۱}{۳}(۰)+۲=۲$	$-\frac{۱}{۳}(۳)+۲=-۱+۲=۱$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$



سوال ۵: معادله ی خطی را بنویسید که از مبداء مختصات و نقطه ی $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$ بگذرد.

پاسخ: فرم کلی معادله ی خطوط مبداء گذر به صورت $y = ax$ است. برای پیدا کردن a باید بدانیم عرض نقطه ی $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$ چندبرابر طول آن است. یعنی عدد ۴ چند برابر ۱- است؟ بنابراین $a = \frac{۴}{-۱} = -۴$

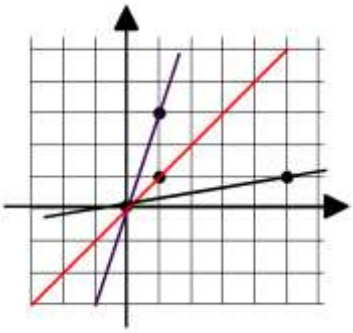
پس معادله ی خط برابر است با : $y = -۴x$

برای یادگیری بهتر و تمرین بیشتر کاردرکلاس و تمرین های درس اول را حل کنید.

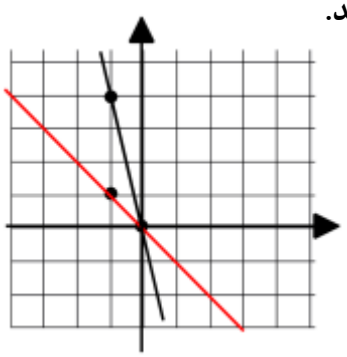
درس دوم: شیب و عرض از مبداء:

به خط های ترسیم شده ی زیر و معادله ی آن ها دقت کنید.

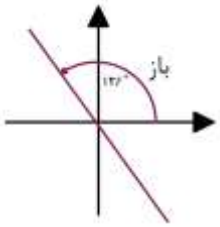
$$\begin{cases} y = x \\ y = ۳x \\ y = \frac{۱}{۵}x \end{cases}$$

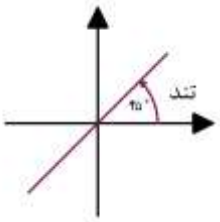


$$\begin{cases} y = -x \\ y = -۴x \end{cases}$$



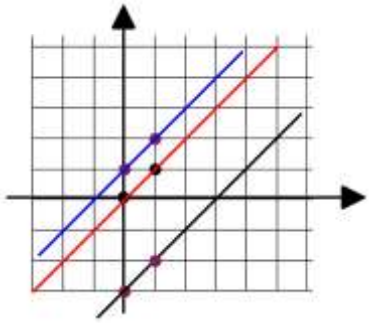
دقت کنید در خطوطی که ضریب x عددی مثبت است زاویه ی بین خط و سمت مثبت محور xها زاویه ای تند و در خطوطی که ضریب x عددی منفی است این زاویه باز است.





به خط های رسم شده توجه کنید :

$$\begin{cases} y = x + ۱ \\ y = x \\ y = x - ۳ \end{cases}$$



هر سه خط موازیند و تنها تفاوت آن ها در محل برخوردشان با محورها است. اگر به معادله ی آن ها دقت کنیم متوجه می شویم ضریب x در هر سه یکسان (عدد ۱) است و محل برخورد آن ها با محور عرض ها برابر با عددی است که با x جمع شده است. (به طور مثال $y = x$ در مبداء مختصات ، خط $y = x + ۱$ در نقطه ی ۱ و خط $y = x - ۳$ در نقطه ۳- محور عرض ها را قطع کرده اند.)

تعریف: نقطه ی برخورد خط با محور عرض ها را عرض از مبداء می نامیم.

تعریف: فرم استاندارد خط $y = ax + b$ است که در آن مقدار a شیب خط و مقدار b عرض از مبداء است.

مثال۱: شیب و عرض از مبداء خطوط را تعیین کنید: الف) $y = ۲x + ۷$ ب) $۲y + ۳x = ۶$

پاسخ: الف) معادله ی خط به فرم $y = ax + b$ است بنابراین ۲= شیب خط و ۷= عرض از مبداء

ب) معادله به فرم استاندارد نیست بنابراین آن را به کمک خواص تساوی به این فرم تبدیل می کنیم:

$$۲y + ۳x = ۶$$
$$۲y = -۳x + ۶$$

طرفین تساوی را بر ضریب y یعنی عدد ۲ تقسیم می کنیم: $\frac{۲y}{۲} = \frac{-۳x}{۲} + \frac{۶}{۲} \Rightarrow y = -\frac{۳}{۲}x + ۳$

بنابراین : $-\frac{۳}{۲}$= شیب خط و ۳= عرض از مبداء

نکته: اگر دو خط با هم موازی باشند شیبهای یکسانی دارند. مانند دو خط $y = ۳x + ۴$ و $y = ۳x - ۷$

مثال۲: معادله ی خطی را بنویسید که با خط $y = ۲x + ۷$ موازی باشد.

پاسخ: کافی است در فرم استاندارد خط ضریب x را مثل خط داده شده عدد ۲ انتخاب کنیم. این مساله بی شمار پاسخ درست دارد. به طور مثال: $y = ۲x - ۱۱$ و $y = ۲x + ۴$ و $y = ۲x$ همه با آن خط موازیند

مثال۳: معادله ی خطی را بنویسید که با خط $y = ۲x + ۷$ موازی باشد و محور عرض ها را در نقطه ی ۲- قطع کند.

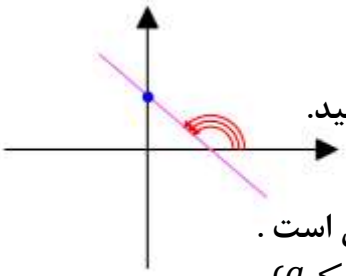
پاسخ: اگر خطی با $y = ۲x + ۷$ موازی باشد شیب آن خط باید ۲ باشد و محل برخورد خط با محور عرض ها یعنی عرض از مبداء آن خط بنابراین شیب خط ۲ و عرض از مبداء آن ۲- است پس معادله اش به صورت $y = ۲x - ۲$ است.

مثال۴: معادله ی خطی را بنویسید که با خط $y = -x + ۳$ موازی باشد و از نقطه ی $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$ بگذرد.

پاسخ: اگر خطی با $y = -x + ۳$ موازی باشد شیب آن خط باید ۱- باشد. پس معادله اش به صورت $y = -x + b$ است.

نقطه ای به طول ۲ و عرض ۴ روی این خط قرار دارد پس در معادله ی $y = -x + b$ به x مقدار ۲ و به y مقدار ۴ می دهیم تا b را به دست آوریم: $۴ = -(۲) + b \Rightarrow -۲ + b = ۴ \Rightarrow b = ۴ + ۲ = ۶$ پس معادله ی خط برابر است با: $y = -x + ۶$

مثال۵: با توجه به خط رسم شده علامت a و b را در معادله ی $y = ax + b$ تعیین کنید.



پاسخ: در شکل مقابل زاویه با سمت راست محور طول ها باز است پس شیب خط منفی است .

خط محور عرض را در قسمت مثبت قطع کرده پس عرض از مبداء مثبت است.یعنی $y = ax + b \Longrightarrow \begin{cases} a < ۰ \\ b > ۰ \end{cases}$

تعیین شیب خط به کمک نمودار:

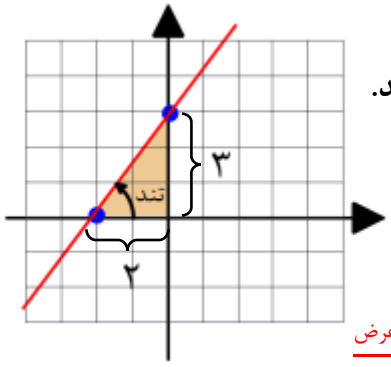
برای تعیین شیب یک خط به کمک نمودار آن به دو نکته باید توجه داشت:

۱) زاویه ای که خط با سمت مثبت محور طول ها ساخته است.

۲) نسبت $\frac{\text{اختلاف عرض}}{\text{اختلاف طول}}$ برای هر دو نقطه ی دلخواه که روی آن خط قرار داشته باشند.

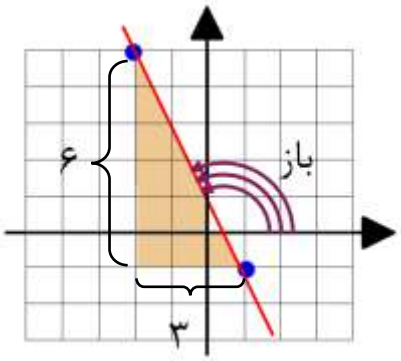
برای درک بهتر به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال) خط مقابل را در نظر بگیرید. این خط با جهت مثبت محور طول ها زاویه ای تند ساخته است. پس شیب خط مثبت است.



دو نقطه ی مشخص شده را در نظر بگیرد. طبق مثلث ترسیم شده داریم: $\frac{\text{اختلاف عرض}}{\text{اختلاف طول}} = \frac{۳}{۲}$

پس شیب این خط عدد $\frac{۳}{۲}+$ است.



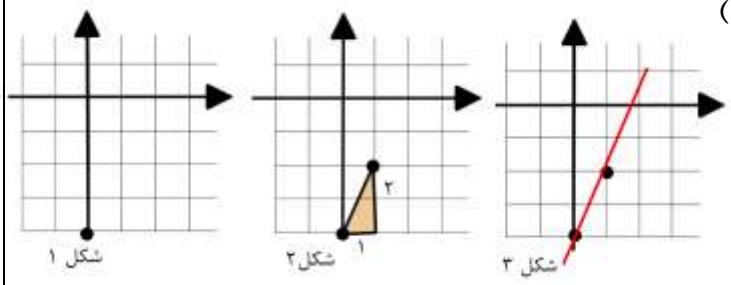
مثال) خط مقابل را در نظر بگیرید. این خط با جهت مثبت محور طول ها زاویه ای باز ساخته است. پس شیب خط منفی است.
دو نقطه ی مشخص شده را در نظر بگیرید.

طبق مثلث ترسیم شده داریم: $\frac{\text{اختلاف عرض}}{\text{اختلاف طول}} = \frac{۶}{۳} = ۲$

پس شیب این خط عدد -۲ است.

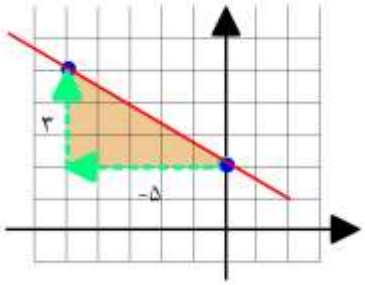
مثال) به کمک تعیین شیب و عرض از مبداء خط $y = ۲x - ۴$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا با توجه به این که عرض از مبداء خط ۴- است روی محور عرض ها نقطه ی ۴- را مشخص می کنیم (شکل ۱) و با توجه به مثبت بودن شیب حرکتی به سمت مثبت محور طول ها با نسبت $\frac{۲}{۱}$ (۲ واحد عرض و یک واحد طول) طی می کنیم تا به نقطه ی دوم برسیم (شکل ۲) . با وصل کردن این دو نقطه خط را ترسیم می کنیم(شکل ۳).



مثال: خط $y = -\frac{۳}{۵}x + ۲$ را رسم کنید.

پاسخ: عرض از مبداء خط ۲+ است. آن را روی محور عرض ها مشخص می کنیم و با توجه به منفی بودن شیب به اندازه ی مخرجش (۵) حرکت طولی به سمت منفی و به اندازه ی صورت(۳) حرکت عرضی انجام می دهیم تا به نقطه ی دوم برسیم.
با وصل کردن این دو نقطه به خط مورد نظر می رسیم.



نکته: شیب ی خط گذرنده از دو نقطه ی A و B برابر است با : $a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.

مثال: شیب خطی که از دو نقطه ی $A = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۵ \\ -۱ \end{bmatrix}$ می گذرد را به دست آورید.

پاسخ: $a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-۲-(-۱)}{۰-۵} = \frac{-۱}{-۵} = \frac{۱}{۵}$ (دقت کنیم در به دست آوردن اختلاف ها ترتیب نوشتن را رعایت کنیم)

نکته: برای تعیین معادله ی خطی که از دو نقطه می گذرد ابتدا با دستور داده شده شیب را محاسبه و با جایگذاری مختصات یکی از نقاط در فرمول $y = ax + b$ عرض از مبداء را تعیین می کنیم.

مثال: معادله ی خطی را بنویسید که از دو نقطه ی $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۵ \\ -۱ \end{bmatrix}$ می گذرد.

پاسخ: به کمک دستور محاسبه ی شیب داریم: $a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{۲-(-۱)}{۴-۵} = \frac{۳}{-۱} = -۳$

پس معادله ی خط به صورت $y = -۳x + b$ است

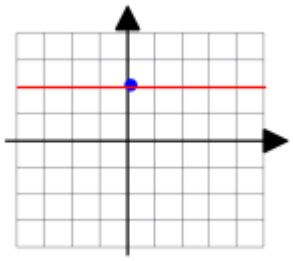
با قرار دادن یکی از نقاط در این رابطه داریم: $۲ = -۳(۴) + b \Rightarrow ۲ = -۱۲ + b \Rightarrow b = ۱۴$

پس معادله ی خط برابر است با: $y = -۳x + ۱۴$

خطوط موازی محورها (معادلاتی به فرم $y = b$ یا $x = a$)

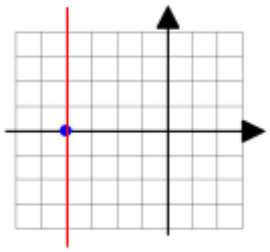
نکته: خطوط موازی محورها نیازی به نقطه یابی ندارند و فقط کافی است هر نقطه ای داده شده را روی محورش پیدا کرد و موازی با محور دیگر خطی ترسیم کرد.

مثال: $y = ۲$ را در صفحه ی مختصات رسم کنید.



حل: ابتدا روی محور عرض ها نقطه ۲ را مشخص و سپس خطی موازی با محور xها (طول ها) ترسیم می کنیم. ویژگی مشترک نقاط این خط این است که عرض همه ی آن ها ۲ است.

مثال: $x = -۴$ را در صفحه ی مختصات رسم کنید.



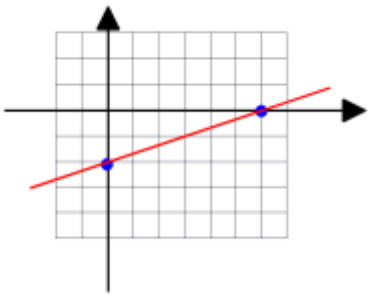
حل: ابتدا روی محور طول ها نقطه ۴- را مشخص و سپس خطی موازی با محور yها (عرض ها)ترسیم می کنیم. ویژگی مشترک نقاط این خط این است که طول همه ی آن ها ۴- است.

نکته: شیب خطوط موازی محور طول ها (به فرم y=b) صفر و شیب خطوط موازی محور عرض ها(به فرم x=a) تعریف نشده است.

نکته: برای رسم خطوط به فرم کلی $ax + by = c$: بهتر است یک بار به جای x و یکبار به جای y صفر قرار داد و معادله را حل کرد.

سوال ۱: خط $x - ۳y = ۶$ را رسم کنید:

پاسخ:

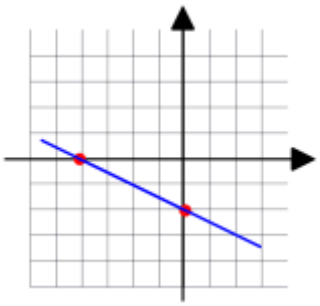


اگر x=۰ داریم : $-۳y = ۶ \Rightarrow y = -۲$ پس نقطه ی $\begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \end{bmatrix}$ روی خط قرار دارد.

اگر y=۰ داریم : $x - ۰ = ۶ \Rightarrow x = ۶$ پس نقطه ی $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۰ \end{bmatrix}$ روی خط قرار دارد.

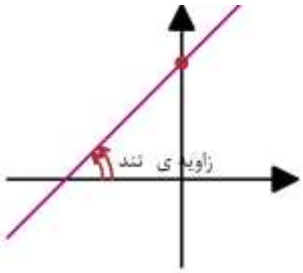
سوال۲: خط $۲x + ۴y = -۸$ را رسم کنید:

پاسخ:



x	۰	$۲x+۰=-۸$ $x=\frac{-۸}{۲}=-۴$
$۲x + ۴y = -۸$	$۰+۴y=-۸$ $y=\frac{-۸}{۴}=-۲$	۰
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -۴ \\ ۰ \end{bmatrix}$

سوال ۳: خط $y = ax + b$ را در نظر بگیرید.با در نظر گرفتن علامت های مختلف برای a و b نمودار تقریبی آن را رسم کنید.

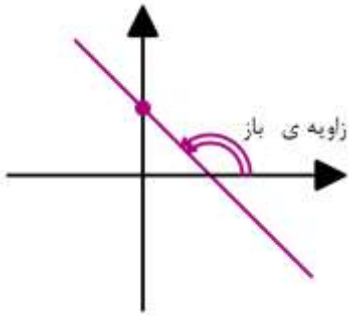


حالت۱) $a > ۰$ و $b > ۰$

خطی با شیب مثبت با جهت مثبت محور طول ها زاویه تند می سازد

و خطی با عرض از مبداء مثبت محور عرض ها را در قسمت مثبت قطع می کند

بنابراین نمودار خط مانند نمودار مقابل خواهد بود.

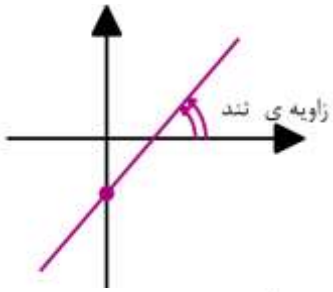


حالت۲) $a < ۰$ و $b > ۰$

خطی با شیب منفی با جهت مثبت محور طول ها زاویه باز می سازد

و خطی با عرض از مبداء مثبت محور عرض ها را در قسمت مثبت قطع می کند

بنابراین نمودار خط مانند نمودار مقابل خواهد بود.

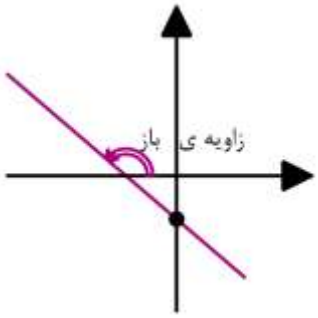


حالت۳) $a > ۰$ و $b < ۰$

خطی با شیب مثبت با جهت مثبت محور طول ها زاویه تند می سازد

و خطی با عرض از مبداء منفی محور عرض ها را در قسمت منفی قطع می کند

بنابراین نمودار خط مانند نمودار مقابل خواهد بود.



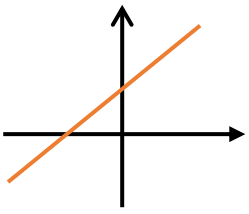
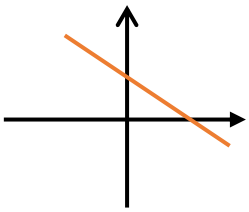
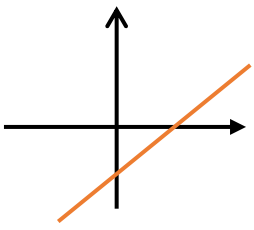
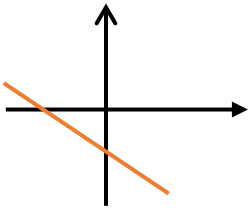
حالت۴) $a < ۰$ و $b < ۰$

خطی با شیب منفی با جهت مثبت محور طول ها زاویه باز می سازد

و خطی با عرض از مبداء منفی محور عرض ها را در قسمت منفی قطع می کند

بنابراین نمودار خط مانند نمودار مقابل خواهد بود.

این چهار حالت را می توان در جدول زیر خلاصه کرد:

شیب / عرض از مبداء	$a > ۰$	$a < ۰$
$b > ۰$		
$b < ۰$		

سوال ۴: معادله ی خطی که از دو نقطه ی $\begin{bmatrix}۳\\-۲\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-۵\\-۲\end{bmatrix}$ می گذرد را بنویسید.

پاسخ: با توجه به این که عرض هر دو نقطه ۲- است معادله ی این خط برابر است با :$y = -۲$

سوال ۵: معادله ی خط را بنویسید که موازی محور عرض ها باشد و از نقطه ی $\begin{bmatrix}-۱\\-۷\end{bmatrix}$ بگذرد.

پاسخ: با توجه به این که معادله ی خطی که موازی محور عرض هاست به صورت :$x = a$ است و با توجه به طول نقطه ای که روی این خط قرار دارد معادله ی خط برابر است با : $x = -۱$

برای یادگیری بیشتر کاردرکلاس ها و تمرینات این درس را حل کنید.

دستگاه معادلات خطی:

دو خط در یک صفحه نسبت به هم یکی از سه حالت زیر را دارند:

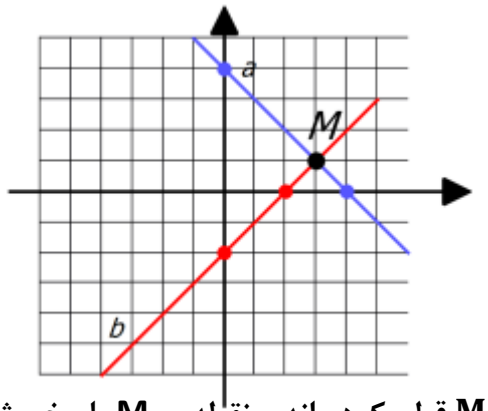
۱) بر هم منطبق هستند . (در این حالت بی شمار نقطه ی مشترک دارند)

۲) متقاطع هستند. (در این حالت فقط در یک نقطه با هم برخورد می کنند و یک نقطه ی مشترک دارند.)

۳) موازیند (و هیچ نقطه ی مشترکی ندارند.)

مثال: دو خط a و b به معادلات زیر را در یک صفحه ی مختصات رسم می کنیم.

$$\begin{cases} a: x+y=۴ \\ b: x-y=۲ \end{cases}$$



این دو خط متقاطعند و همدیگر را در نقطه ی $M=\begin{bmatrix}۳\\۱\end{bmatrix}$ قطع کرده اند و نقطه ی M پاسخ مشترک هر دو معادله است.

منظور از حل دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} x+y=۴ \\ x-y=۲ \end{cases}$ پیدا کردن مختصات محل برخورد این دو خط است.یعنی پیدا کردن نقطه ای که جواب مشترک هر دو معادله باشد.(نقطه ی M)

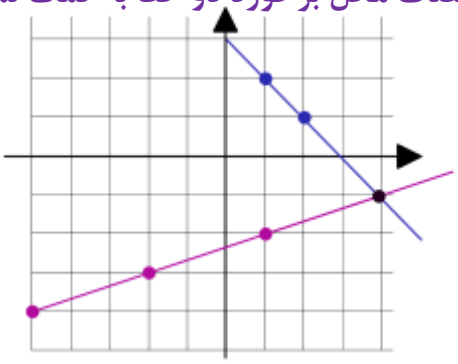
اگر دو خط داده شده موازی باشند نقطه ی تقاطع ندارند و دستگاه معادلات پاسخ ندارد.

اگر دو خط بر هم منطبق باشند دستگاه بی شمار پاسخ درست دارد.

برای حل دستگاه معادلات خطی سه روش وجود دارد.

روش اول: رسم دو خط و پیدا کردن مختصات محل برخورد دو خط به کمک نمودار

$$\begin{cases} x+y=۳ \\ x-۳y=۷ \end{cases}$$



محل برخورد دو خط:

پاسخ دستگاه: $\begin{bmatrix}۴\\-۱\end{bmatrix}$

نکته : با ضرب کردن طرفین معادله ی یک خط در عددی حقیقی معادله ی خط جدیدی به دست نمی آید.

مثال: خط $x+y=۴$ و $۲x+۲y=۸$ بر هم منطبقند . زیرا با ضرب طرفین تساوی اول در عدد ۲ معادله ی دوم به دست می آید. $۲(x+y=۴) \Rightarrow ۲x+۲y=۸$

روش دوم: حذفی

در این روش به کمک ضرب کردن طرفین معادلات در اعدادی مناسب و جمع طرفین ، یکی از متغیرها را حذف و دیگری را با حل معادله تعیین می کنیم. برای درک بهتر به مثال های زیر توجه کنید.

سوال: دستگاه معادلات مقابل را حل کنید:

$$\begin{cases} x + ۲y = ۱۰ \\ ۳x - ۲y = ۱۲ \end{cases}$$

پاسخ: اگر دو معادله را با هم جمع کنیم داریم:

$$\begin{cases} x + ۲y = ۸ \\ ۳x - ۲y = ۱۲ \end{cases}$$

$$۴x = ۲۰$$

$$x = \frac{۲۰}{۴} = ۵$$

پس مقدار x در معادله ی بالا عدد ۵ است. حال با انتخاب یکی از خط ها (خط اول) و دادن مقدار ۵ به متغیر x و حل معادله ، y را محاسبه می کنیم :

$$۵ + ۲y = ۸$$

$$۲y = ۸ - ۵ = ۳$$

$$y = \frac{۳}{۲}$$

دستگاه جواب: $\begin{bmatrix} ۵ \\ \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$

مثال) دستگاه $\begin{cases} ۲x + y = ۷ \\ x - ۳y = -۷ \end{cases}$ **را به روش حذفی حل کنید.**

با توجه به ضرایب x و y بهتر است رابطه ی اول را در ۳ ضرب کنیم تا قسمت y تبدیل به y ۳ گردد. زیرا با جمع عبارتهای متشابه در دو خط ، قسمت y ها حذف می شوند (چون قرینه ی یکدیگرند)

$$۳\times \begin{cases} ۲x + y = ۷ \\ x - ۳y = -۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶x + ۳y = ۲۱ \\ x - ۳y = -۷ \end{cases}$$

$$۷x = ۱۴$$

$$x = ۲$$

$$۲ - ۳y = -۷$$

$$-۳y = -۹$$

$$y = ۳$$

جواب دستگاه: $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$

مثال) دستگاه $\begin{cases} x + y = ۷ \\ x + ۳y = -۷ \end{cases}$ **را حل کنید.**

کافی است برای قرینه کردن قسمت xها رابطه ی اول را در ۱- ضرب کنیم.

$$-۱\times \begin{cases} x + y = ۷ \\ x + ۳y = -۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = -۷ \\ x + ۳y = -۷ \end{cases}$$

$$۲y = -۱۴$$

$$y = -۷$$

$$x + (-۷) = ۷$$

$$x = ۷ + ۷ = ۱۴$$

جواب دستگاه: $\begin{bmatrix} ۱۴ \\ -۷ \end{bmatrix}$

اگر معادلات داده شده کسری باشند یا به فرم کلی خط نوشته نشده اند ابتدا آن ها را به فرم کلی تبدیل می کنیم:

مثال)دستگاه $\begin{cases} \frac{۲x}{۷}+\frac{y}{۲}=۶ \\ x=۳y-۱۷ \end{cases}$ را حل کنید.

ابتدا با ضرب در ک م م مخرج ها معادله ی اول را ساده تر و معادله ی دوم را به فرم کلی تبدیل و حل می کنیم:

$$۱۴\times \begin{cases} \frac{۲x}{۷}+\frac{y}{۲}=۶ \\ x=۳y-۱۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ -۴\times \end{matrix}\begin{cases} ۴x+۷y=۸۴ \\ x-۳y=-۱۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴x+۷y=۸۴ \\ -۴x+۱۲y=۶۸ \end{cases}$$

$$۱۹y=۱۵۲$$

$$y=۸$$

$$x-۳(۸)=-۱۷$$

$$x=-۱۷+۲۴=۷$$

جواب دستگاه: $\begin{bmatrix} ۷ \\ ۸ \end{bmatrix}$

گاهی برای حذف یکی از متغیرها دو معادله نیاز به تغییر دارند.

مثال) برای اینکه متغیر x در دستگاه مقابل حذف شود باید رابطه ی اول را در ۲ و رابطه ی دوم را در ۳- ضرب کنیم تا قرینه ی یکدیگر شوند:

$$\begin{matrix} ۲\times \\ -۳\times \end{matrix}\begin{cases} ۳x+۲y=۸ \\ ۲x+۵y=۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۶x+۴y=۱۶ \\ -۶x-۱۵y=-۳ \end{cases}$$

و مانند سایر مثال ها آن را حل می کنیم.

روش سوم: جایگزینی

در این روش مقدار یکی از متغیرها را از رابطه ی اول یا دوم محاسبه و در رابطه ی دیگر قرار می دهیم:

مثال: دستگاه مقابل را به روش جایگزینی حل کنید. $\begin{cases} x-۳y=۴ \\ ۲x+y=۸ \end{cases}$

با جابه جا کردن y ۳- در رابطه ی $x-۳y=۴$ داریم: $x=۳y+۴$

پس در معادله ی دوم مقدار $x=۳y+۴$ قرار می دهیم:

$$۲x+y=۸ \Rightarrow ۲(۳y+۴)+y=۸$$

$$\Rightarrow ۶y+۸+y=۸ \Rightarrow ۷y=۸-۸=۰ \Rightarrow y=\frac{۰}{۷}=۰$$

و با قرار دادن مقدار y در همان رابطه مقدار x را محاسبه می کنیم: $x=۳y+۴=۳\times ۰+۴=۴$

پاسخ دستگاه نقطه ی $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \end{bmatrix}$ است.

مثال: دستگاه را به روش جایگزینی حل کنید: $\begin{cases} ۲x + y = -۱ \\ x - ۶y = -۷ \end{cases}$

پاسخ: با توجه به معادله دوم داریم: $x - ۶y = -۷ \Rightarrow x = ۶y - ۷$

با جایگزین کردن $۶y - ۷$ به جای x در معادله اول داریم:

$$\Rightarrow ۲(۶y - ۷) + y = -۱$$

$$\Rightarrow ۱۳y - ۱۴ = -۱ \Rightarrow ۱۳y = ۱۳ \Rightarrow y = ۱$$

برای محاسبه ی x مقدار $y=۱$ را در رابطه ی $x = ۶y - ۷$ قرار می دهیم.

$x = ۶y - ۷ \Rightarrow x = ۶(۱) - ۷ = -۱$ جواب دستگاه : $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$

حل مساله به کمک دستگاه:

مثال:

سن علی دو برابر سن خواهرش است. اگر مجموع سن آنها ۲۴ سال باشد ، سن هر یک را با تشکیل دستگاه معادلات به دست آورید.

علی ۱۶ ساله و خواهرش ۸ ساله است

سن علی: x سن خواهرش: y $x = ۲y$ جمع سن آنها : $x + y = ۲۴$

$$\left.\begin{matrix} x - ۲y = ۰ \\ -۱ \times \quad (x + y = ۲۴) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - ۲y = ۰ \\ -x - y = -۲۴ \end{matrix}\right\}$$

$$-۳y = -۲۴$$

$$y = ۸$$

$$x = ۲ \times ۸ = ۱۶$$

مثال:

اختلاف دو زاویه ی متمم ۲۰ درجه است. اندازه ی هر کدام چقدر است؟

پاسخ: زاویه کوچک: y زاویه ی بزرگ: x (مجموع دو زاویه ی متمم ۹۰ درجه است)

با توجه به داده های سوال دو معادله می نویسیم و دستگاه را به روش دلخواه حل می کنیم:

$$\begin{cases} x + y = ۹۰ \\ x - y = ۲۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۵۵ - y = ۲۰ \Rightarrow y = ۵۵ - ۲۰ = ۳۵$$

$$۲x = ۱۱۰$$

$$x = \frac{۱۱۰}{۲} = ۵۵$$

برای یادگیری بهتر کاردرکلاس ها و تمرینات این درس را حل کنید.