

۱. باتوجه به نمودار زیر کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

$B - A = \{7, 6, 5\}$ (۲)

$A - B = \{4\}$ (۱)

$B - A = \{4\}$ (۴)

$A - B = \{7, 6, 5\}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۲ $A - B$ یعنی همه عضوهایی از B که عضو A نیستند که از روی نمودار برابر است با $\{7, 6, 5\}$ و $A - B$ یعنی همه عضوهایی از A که عضو B نیستند که از روی نمودار برابر است با $\{1, 2, 3, 8\}$.

۲. کدام یک از عبارت‌های زیر مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کند؟

(۲) هفت عدد طبیعی متوالی با شروع از ۱۱

(۱) شش عدد فرد متوالی

(۴) عددهای طبیعی بین ۴ و ۵

(۳) شمارنده‌های ۲۵

پاسخ: گزینه ۱ در گزینه (۱) دقیقاً مشخص نیست کدام ۶ عدد متوالی فرد را می‌توان قرار داد، پس چون اعضای مجموعه دقیق مشخص نیست این عبارت معرف یک مجموعه نیست.

گزینه (۲): $\{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$: هفت عدد طبیعی متوالی با شروع از ۱۱

گزینه (۳): $\{1, 5, 25\}$: شمارنده‌های ۲۵

گزینه (۴): $\{ \}$: عددهای طبیعی بین ۴ و ۵

۳. در پرتاب دو تاس احتمال آن که مجموع دو عدد ظاهر شده بزرگ‌تر از ۱۰ باشد، کدام است؟

$\frac{5}{36}$ (۴)

$\frac{1}{12}$ (۳)

$\frac{1}{9}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ تعداد همه حالت‌های ممکن در پرتاب دو تاس برابر است با: $36 = 6 \times 6 = n(S)$ و تعداد حالت‌هایی که مجموع دو تاس بزرگ‌تر از ۱۰ باشد برابر است با:

$A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\} \Rightarrow n(A) = 3$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

۴. مجموعه‌ی $A = \{x | x^2 \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$ و $B = \{x^2 | x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$ مفروض است. مجموعه‌ی $A \cap B$ دارای چند زیرمجموعه می‌باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ ابتدای اعضای دو مجموعه‌ی A و B را می‌نویسیم:

$A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, \sqrt{16}\}$

$= \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, 3, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, 4\}$

$B = \{1, 4, 9, 16\}$

$\Rightarrow A \cap B = \{1, 4\}$

پس تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B$ برابر $2^2 = 4$ می‌شود.

۵. در مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ چند زیرمجموعه می‌توان نوشت که a عضو آن باشد ولی b عضو نباشد؟

۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

۱۴ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ نکته: اگر A مجموعه‌ای n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌هایی از A که شامل r عضو باشد و شامل q عضو نباشد، از رابطه 2^{n-r-q} به دست می‌آید.

در این سؤال مجموعه A دارای ۶ عضو است، حال تعداد زیرمجموعه‌هایی که عضو a را داشته باشند، ولی عضو b نداشته باشند. (شامل یک عضو a باشد و شامل یک

عضو b نباشد):

$$2^{6-1-1} = 2^4 = 16$$

۶. اگر $A = \{3, 2x, 2-y\}$ و $B = \{4, 2+y, 1\}$ باشد و بدانیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ آنگاه $x+y$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ هرگاه $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ در این صورت $A = B$ است. پس:

$$A = B$$

$$3 = 2 + y \Rightarrow y = 1$$

$$2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$x + y = 3$$

۷. مجموعه $\{8^{11}, 32^7, \sqrt{64^{11}}, 2^{35}\}$ چند عضو دارد؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا سعی می کنیم اعداد داخل مجموعه را به شکل ساده تری مشخص کنیم:

$$8^{11} = (2^3)^{11} = 2^{33}$$

$$32^7 = (2^5)^7 = 2^{35}$$

$$\sqrt{64^{11}} = \sqrt{(2^6)^{11}} = \sqrt{2^{66}} = 2^{33}$$

در مجموعه عضو تکراری شمرده نمی شود، پس A دارای دو عضو 2^{33} و 2^{35} می باشد.

۸. از راست به چپ کدام دو عدد باید در جاهای خالی قرار بگیرد به طوری که تساوی زیر برقرار باشد؟

$$\left\{-\frac{6}{3}, -3, \dots, \frac{4}{3}, 4\right\} = \left\{4, -\sqrt{9}, \frac{\sqrt{81}}{(-1)^3}, \frac{12}{9}, \dots\right\}$$

-۹ و -۲ (۴)

-۹ و ۲ (۳)

۹ و -۲ (۲)

۹ و ۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ برای اینکه تساوی برقرار باشد باید هر کدام از اعضای هر مجموعه در دیگری وجود داشته باشد. در مجموعه سمت راست باید عضو $-\frac{6}{3}$ یا -۲ را

قرار دهیم و در مجموعه سمت چپ باید عضو $\frac{\sqrt{81}}{(-1)^3}$ یا -۹ را قرار دهیم:

$$\frac{\sqrt{81}}{(-1)^3} = \frac{9}{-1} = -9$$

$$-\frac{6}{3} = -2$$

$$\left\{-\frac{6}{3}, -3, -9, \frac{4}{3}, 4\right\} = \left\{-4, -\sqrt{9}, \frac{\sqrt{81}}{(-1)^3}, \frac{12}{9}, -2\right\}$$

۹. چند درصد از عضوهای $\{1, 2, 3, 4, \dots, 10000\}$ مربع اعداد طبیعی هستند؟

۵۰% (۴)

۱۰% (۳)

۵% (۲)

۱% (۱)

پاسخ: گزینه ۱ اولین مربع عدد ۱ است و چون $100^2 = 10000$ پس؛ پیدا کردن اعداد ۱ تا ۱۰۰ می توانیم تعداد مربع عددهای طبیعی را بدست آوریم. پس

۱۰۰ مربع طبیعی داریم و تعداد عضوهای مجموعه برابر ۱۰۰۰۰ است. بنابراین:

$$\frac{100}{10000} = \frac{1}{100} = 1\%$$

۱۰. کدام عبارت یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

- (۱) چهار عدد فرد متوالی (۲) پنج عدد بزرگتر از ۱۰۰ (۳) سه شهر ایران (۴) عددهای طبیعی بین ۳ و ۴

پاسخ: گزینه ۴ اعضای مجموعه‌های گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ مشخص و متمایز نیست، پس نشان‌دهنده یک مجموعه نمی‌باشد. ولی گزینه ۴ مجموعه‌ای تهی است و نشان‌دهنده یک مجموعه است.

۱۱. در صورتی که $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ و $B = \{2x + 3 | x \in \mathbb{N}, x < 5\}$ باشد، مجموعه $A \cap B$ چند زیرمجموعه یک عضوی دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا مجموعه B را با اعضایش نمایش می‌دهیم:

$$B = \{2x + 3 | x \in \mathbb{N}, x < 5\} = \{5, 7, 9, 11\}$$

$$A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{5, 7, 9, 11\} = \{5, 7, 9\}$$

$A \cap B$ سه عضو دارد، پس تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر $2^3 = 8$ است. و زیرمجموعه‌های یک عضوی آن برابر ۳ است.

$$\{5\}, \{7\}, \{9\}$$

۱۲. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n + 3$ عضو چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $n - 1$ عضو است؟

- (۱) ۸ برابر (۲) ۳۲ برابر (۳) $n + 2$ برابر (۴) ۱۶ برابر

پاسخ: گزینه ۴ تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌های $n + 3$ عضو برابر 2^{n+3} و تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $n - 1$ عضو برابر 2^{n-1} است در نتیجه

$$\frac{2^{n+3}}{2^{n-1}} = 2^{n+3} \div 2^{n-1} = 2^{n+3-n+1} = 2^4 = 16$$

۱۳. دو مجموعه $\{x, 3\}$ و $\{y, 8, z\}$ برابرند، بیشترین مقدار عبارت $x + y - z$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۳ (۳) ۱۷ (۴) ۱۹

پاسخ: گزینه ۲ برای این که مقدار $x + y - z$ بیشترین مقدار را داشته باشد، x و y باید دارای بیشترین مقدار ممکن و z کمترین مقدار ممکن انتخاب شوند.

چون دو مجموعه برابرند، پس مجموعه $\{y, 8, z\}$ دارای یک عضو تکراری است، پس برای y (بیشترین مقدار) $y = 8$ و برای z (کمترین مقدار) $z = 3$ ؛ همچنین در مجموعه $\{x, 3\}$ برای x داریم: $x = 8$

$$\Rightarrow x + y - z = 8 + 8 - 3 = 13$$

۱۴. ۲۰۰۶ دانش‌آموز در یک بررسی آماری شرکت کرده‌اند. معلوم شد ۱۵۰۰ نفر از این دانش‌آموزان در مسابقه‌ی ریاضی کانگورو شرکت کرده‌اند و ۱۲۰۰ نفر از آنها هم در مسابقه ادبیات. اگر بدانیم که ۶ نفر در هیچ مسابقه‌ای شرکت نکرده‌اند، چند نفر از این دانش‌آموزان در هر دو شرکت کرده‌اند؟

- (۱) ۳۰۰ (۲) ۵۰۰ (۳) ۶۰۰ (۴) ۷۰۰

پاسخ: گزینه ۴ ۶ نفر که در هیچ کدام شرکت نکرده‌اند را از کل دانش‌آموزان کم می‌کنیم $2006 - 6 = 2000$

حال اگر دانش‌آموزان شرکت‌کننده در مسابقه ریاضی کانگورو را A در نظر بگیریم و شرکت‌کننده در مسابقه ادبیات را B می‌توانیم کل شرکت‌کنندگان در مسابقات ریاضی و ادبی را با $A \cup B$ نشان دهیم خواهیم داشت:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$2000 = 1500 + 1200 - x \Rightarrow 2000 = 2700 - x \Rightarrow x = 700$$

۱۵. چند عدد دو رقمی وجود دارد که مضرب ۳ باشد ولی بر ۵ بخش‌پذیر نباشد؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۶ (۳) ۲۵ (۴) ۲۷

پاسخ: گزینه ۱ عدد دو رقمی مضرب ۳ برابرند با:

$$\frac{99 - 9}{3} = \frac{90}{3} = 30$$

بر ۳ و ۵ بخش پذیرند. $\rightarrow \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$ مضارب ۱۵

$$30 - 6 = 24$$

۱۶. احتمال آن که در مدتی که سوزان از مدرسه به خانه می‌رود، باران بیارد $\frac{1}{3}$ است احتمال آنکه سوزان به خاطر داشته باشد که چتر خودش را به

همراه آورد $\frac{3}{5}$ است. اگر این دو اتفاق (پیشامد) مستقل از یکدیگر باشند چقدر احتمال دارد که سوزان موقع رسیدن به منزل خیس شده باشد؟

$$\frac{11}{15} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{2}{15} \quad \boxed{3}$$

$$\frac{2}{5} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{1}{5} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳ وقتی سوزان خیس شده است، یعنی: باران بارید و چتر خودش را نیاورده است. احتمال اینکه سوزان چتر خودش را به همراه آورد $\frac{3}{5}$ است.

بنابراین احتمال اینکه چتر را با خودش نیاورده باشد $\frac{2}{5} = 1 - \frac{3}{5}$ است.

سوزان چتر نیاورده و باران باریده = پیشامد مطلوب

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

۱۷. تعداد زیرمجموعه‌های $\{5, -3, 2\}$ چند تاست؟

$$3 \quad \boxed{4}$$

$$6 \quad \boxed{3}$$

$$8 \quad \boxed{2}$$

$$7 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲ مجموعه‌ی $\{5, -3, 2\}$ سه تا عضو دارد. پس $2^3 = 8$ زیرمجموعه نیز دارد.

۱۸. اگر $A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$ و $B = \{1, 2\}$ ، $C = \{1, \{1\}\}$ ، آنگاه کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

$$(B - C) \cap A = \emptyset \quad \boxed{4}$$

$$A \cap B = \{1, 2\} \quad \boxed{3}$$

$$n(A \cap C) = 2 \quad \boxed{2}$$

$$C \subseteq A \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: هر دو عضو مجموعه C در مجموعه A وجود دارد. پس $C \subseteq A$ و این گزینه درست می‌باشد.

گزینه «۲»: درست $A \cap C = \{1, \{1\}\} \Rightarrow n(A \cap C) = 2$

گزینه «۳»: نادرست زیرا: $A \cap B = \{1\}$

گزینه «۴»: درست $B = C = \{2\} = (B - C) \cap A = \emptyset$

۱۹. چند تا از عبارات زیر صحیح است؟

الف) $Z \subseteq Q' \Rightarrow Q \cap Q' = \emptyset$ (ب) $Z \subseteq Q$ (پ) $Z \subseteq Q$ (ت) $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq Q'$

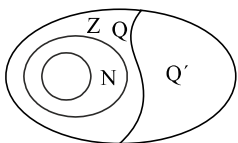
$$\text{هیچ کدام} \quad \boxed{4}$$

$$4 \text{ تا} \quad \boxed{3}$$

$$2 \text{ دو تا} \quad \boxed{2}$$

$$1 \text{ یکی} \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۲ این مجموعه به کمک نمودار ون به صورت زیر مشخص شده است. باتوجه به این نمودار عبارت پ و ب صحیح هستند.



۲۰. در یک جعبه ۲۰ توپ قرمز، ۱۵ توپ سفید و تعدادی توپ آبی وجود دارد. اگر شما یک توپ به طور تصادفی از جعبه بردارید، احتمال آبی بودنش،

$\frac{6}{7}$ است. چند توپ آبی در جعبه است؟

$$210 \quad \boxed{4}$$

$$105 \quad \boxed{3}$$

$$70 \quad \boxed{2}$$

$$30 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۴ تعداد توپ‌های آبی را x در نظر می‌گیریم و می‌دانیم احتمال اینکه توپ خارج شده از جعبه آبی رنگ باشد، $\frac{6}{7}$ است. پس داریم:

$$\frac{x}{20 + 15 + x} = \frac{6}{7} \Rightarrow 7x = 120 + 90 + 6x \Rightarrow x = 210$$

۲۱. اگر از اعضای مجموعه B سه عضو کم کنیم، از تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲۲۴ واحد کم می‌شود، مجموعه B چند عضو دارد؟

$$11 \quad \boxed{4}$$

$$8 \quad \boxed{3}$$

$$10 \quad \boxed{2}$$

$$9 \quad \boxed{1}$$

پاسخ: گزینه ۳ n را تعداد عضوهای مجموعه B در نظر می‌گیریم پس تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر 2^n می‌شود. اگر سه واحد از اعضای آن کم شود $(n - 3)$

تعداد زیر مجموعه های آن ۲۲۴ واحد کم می شود. پس:

$$2^n - 2^{n-3} = 224 \Rightarrow 2^n \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 224$$

$$\Rightarrow 2^n \left(\frac{7}{8}\right) = 224 \Rightarrow 2^n = 224 \div \frac{7}{8} = 224 \times \frac{8}{7} = 256$$

$$\Rightarrow 2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8$$

تعداد اعضای مجموعه B برابر ۸ است.

۲۲. ۵ دانش آموز هر کدام عددی از مجموعه {۱, ۲, ۴} انتخاب کردند و روی تخته نوشتند. بعد حاصل ضرب عددهایی را که نوشته بودند حساب کردند. کدام یک از عددهای زیر می تواند مقدار این حاصل ضرب باشد؟

۴۰۹۶ (۴)

۷۶۸ (۳)

۲۵۶ (۲)

۱۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ چون تعداد دانش آموزان ۵ نفر است بنابراین اگر هر ۵ تای آن ها عدد ۴ را انتخاب کنند بنابراین پس بیشترین مقدار ممکن ۱۰۲۴ خواهد بود پس گزینه ۴ حذف می شود همچنین عددی که به دست می آید باید از توان ۲ باشد و در میان گزینه های باقی مانده فقط ۲۵۶ است که از عامل های ۲ بدست آمده است.

۲۳. اگر $A \cup B = A - B$ باشد، کدام گزینه درست است؟

$B \subseteq A$ (۴)

$A = B$ (۳)

$B = \emptyset$ (۲)

$A = \emptyset$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ در گزینه (۱) اگر $A = \emptyset$ باشد، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \emptyset \cup B = B \\ \emptyset - B = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup B \neq A - B$$

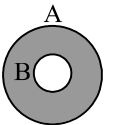
در گزینه (۲) اگر $B = \emptyset$ باشد، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} A \cup \emptyset = A \\ A - \emptyset = A \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup B = A - B$$

در گزینه (۳) اگر $A = B$ باشد، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} A \cup A = A \\ A - A = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup B \neq A - B$$

در گزینه (۴) اگر $B \subseteq A$ باشد، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} A \cup B = A \\ A - B \Rightarrow \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup B \neq A - B$$


۲۴. مجموعه A شامل تمام اعداد چهار رقمی است که حاصل ضرب رقم هایشان ۹ است. یکی از عضوهای این مجموعه را به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه این عدد کوچکتر از ۳۰۰۰ باشد کدام است؟

$\frac{5}{6}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{3}{5}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ مجموعه همه حالت های ممکن (اعداد چهار رقمی که حاصل ضرب رقم هایشان ۹ است) برابر است با:

$$S = \{1119, 1191, 1911, 9111, 3311, 3131, 3113, 1331, 1133, 1313\} \Rightarrow n(S) = 10$$

اگر مجموعه A را مجموعه اعداد از S که از ۳۰۰۰ کوچکتر باشند در نظر بگیریم:

$$A = \{1119, 1191, 1911, 1331, 1133, 1313\} \Rightarrow n(A) = 6$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

۲۵. نوید در یک مهمانی شرکت کرده بود. او متوجه شد که ۳ نفر از میهمانان در یک روز هفته و یک ماه از سالی که او به دنیا آمده بود متولد شده‌اند. همچنین او متوجه شد همگی میهمانان در ۶ ماه نخست سال متولد شده‌اند. در این مهمانی حداقل چند نفر شرکت کرده باشند (با نوید) که مطمئن باشیم چنین اتفاقی می‌افتد؟

۱۹۶ (۴)

۸۵ (۳)

۸۰ (۲)

۷۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

۷ روز هفته داریم و ۶ ماه، بنابراین $۴۲ = ۶ \times ۷$ انتخاب وجود دارد. در این صورت برای اینکه ۳ نفر در روز و ماه مشترک باشند باید حداقل $۸۵ = ۴۲ \times ۲ + ۱$ مهمان وجود داشته باشد.

۲۶. اگر تاسی را پرتاب کنیم، احتمال آنکه عدد رو شده زوج و اول باشد، کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

در یک تاس داریم:

$$n(S) = ۶$$

$$A = \{۲\} \Rightarrow n(A) = ۱$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

از طرفی می‌دانیم تنها عدد اول زوج، ۲ است.

در نتیجه احتمال آن برابر است با:

۲۷. یک تاس و ۳ سکه را با هم می‌اندازیم. احتمال آنکه تعداد دفعاتی که «رو» ظاهر می‌شود با عدد روی تاس برابر باشد، کدام است؟

$\frac{۷}{۳۶}$ (۴)

$\frac{۵}{۳۶}$ (۳)

$\frac{۵}{۴۸}$ (۲)

$\frac{۷}{۴۸}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا تعداد کل حالت‌های پرتاب یک تاس و سه سکه را به دست می‌آوریم:

$$n(S) = ۶ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۴۸$$

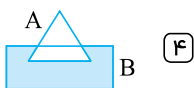
حال مجموعه A را به صورت زیر در نظر می‌گیریم (شماره تاس برابر تعداد دفعات رو آمدن سکه‌ها):

$$A = \{(۱, ر, ر, پ), (۱, پ, ر, ر), (۱, ر, پ, ر), (۱, پ, پ, ر), (۲, ر, ر, ر), (۲, ر, ر, پ), (۲, پ, ر, ر), (۲, پ, پ, ر), (۳, ر, ر, ر), (۳, ر, ر, پ), (۳, پ, ر, ر), (۳, پ, پ, ر)\}$$

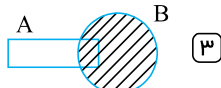
$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۷}{۴۸}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۷}{۴۸}$$

۲۸. در کدام گزینه مجموعه $A - (A - B)$ درست رنگ خورده است؟



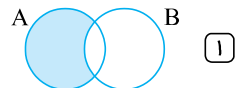
(۴)



(۳)

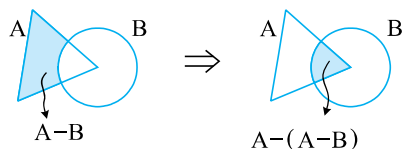
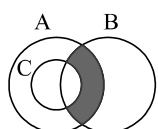


(۲)



(۱)

پاسخ: گزینه ۲



۲۹. باتوجه به شکل، کدام گزینه قسمت رنگی را نشان نمی‌دهد؟

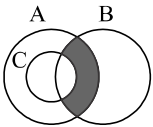
$$(A \cap B) - C \quad (۲)$$

$$A \cap (B - C) \quad (۱)$$

$$(A - C) \cup B \quad (۴)$$

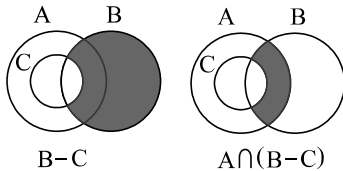
$$(A - C) \cap B \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۴

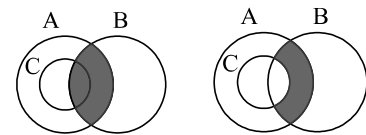


بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱ نشان دهنده مجموعه بالا می‌باشد. زیرا:

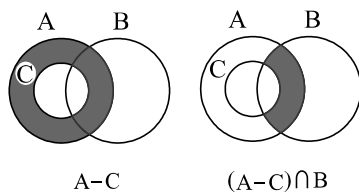


گزینه ۲ نیز نشان دهنده قسمت رنگی می‌باشد.

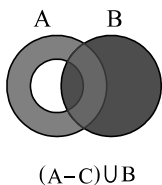


$$A \cap B \xrightarrow{C \text{ را کم می‌کنیم}} A \cap B - C$$

گزینه ۳ نیز بیانگر قسمت مشخص شده می‌باشد.



اما گزینه ۴ بیانگر مجموعه زیر است که با صورت سؤال مطابقت ندارد.



۳۰. اگر به تعداد اعضای یک مجموعه ۳ عضو اضافه شود، به تعداد زیر مجموعه‌هایش ۴۴۸ عضو اضافه می‌شود. این مجموعه چند عضوی است؟

۶ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ یعنی 2^{n+3} از 2^n تعداد ۴۴۸ تا بیش‌تر است یعنی:

$$2^{n+3} - 2^n = 448$$

$$2^n(2^3 - 1) = 448 \Rightarrow 2^n = 64 = 2^6 \Rightarrow n = 6$$

۳۱. اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 5\}$ باشد، به جای X در رابطه $(A \cap B) \subseteq X \subseteq (A \cup B)$ چند مجموعه متفاوت می‌توان قرار داد؟

۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A \cap B = \{3\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$(A \cap B) \subseteq X \subseteq (A \cup B)$$

$$\{3\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

مجموعه X عضو ۳ را حتماً باید داشته باشد ولی عضوهای ۱ و ۲ و ۴ و ۵ را می‌تواند داشته باشد یا نداشته باشد (برای هر کدام دو حالت وجود دارد).

پس $2^4 = 16$ مجموعه متفاوت می توان به جای X قرار داد.

۳۲. اگر $A_1 = \{1\}$ و $A_2 = \{2, 3\}$ و $A_3 = \{4, 5, 6\}$ و $A_4 = \{7, 8, 9, 10\}$ و... باشد. A_{12} با چه عددی شروع می شود؟ (روبوکاپ - ۱۳۸۶)

۶۹ (۴)

۶۸ (۳)

۶۷ (۲)

۶۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ حل به روش الگویابی ابتدا برای هر کدام از شماره های مجموعه های A با استفاده از عضو ابتدایی آن یک جدول تشکیل می دهیم.

مجموعه	A_1	A_2	A_3	A_4	A_n
آخرین عضو	۱	۳	۶	۱۰	$\frac{n(n+1)}{2}$

پس برای مجموعه ی A_n آخرین عضو آن $\frac{n(n+1)}{2}$ است. عضو ابتدا A_{12} یکی بیشتر از عضو آخر A_{11} است. پس داریم:

$$\frac{11 \times 12}{2} + 1 = 67$$

۳۳. تساوی دو مجموعه مقابل نتیجه کدام خاصیت مجموعه بودن می باشد؟ $\{a, b, c, a\} = \{a, b, c\}$

(۲) مهم نبودن ترتیب نوشتن اعضای مجموعه

(۱) مشخص بودن اعضای مجموعه

(۴) همه موارد

(۳) متمایز بودن اعضای مجموعه

پاسخ: گزینه ۳ متمایز بودن اعضای مجموعه بدین معنی است که می توان اعضای تکراری را فقط یکبار نوشت

بنابراین: $\{a, b, c, a\} = \{a, b, c\}$

۳۴. اگر $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ و $B = \{1, 2, 3, \dots, 17\}$ و $A \subseteq X \subseteq B$ باشند، به جای X چند مجموعه می توان قرار داد؟

۲۵۶ (۴)

۱۲۸ (۳)

۶۴ (۲)

۳۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ تعداد مجموعه هایی که جای X می توانند قرار گیرند برابر است با تعداد زیرمجموعه های مجموعه $\{11, 12, 13, \dots, 17\}$.

$$2^{17-10} = 2^7 = 128$$

۳۵. اگر مجموعه $A = \{2x - 1 \mid x \in \mathbb{N}, x < 5\}$ و $B = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x < 3\}$ و $C = \{x \mid x \in W, x^2 < 10\}$ باشند، تعداد

عضوهای $(A \cup B) - C$ چند عضو می باشد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا هر یک از مجموعه های A, B, C را با اعضای آنها مشخص می کنیم:

$$A = \{1, 3, 5, 7\}, \quad B = \{0, 2, 4\}, \quad C = \{0, 1, 2, 3\}$$

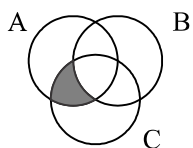
$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$$

$$C = \{0, 1, 2, 3\}$$

مجموعه C یعنی اعداد $\{0, 1, 2, 3\}$ را از مجموعه $A \cup B$ کم می کنیم:

$$(A \cup B) - C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\} - \{0, 1, 2, 3\} = \{4, 5, 7\}$$

۳۶. کدام گزینه نشان دهنده قسمت سایه خورده می باشد؟



$(A \cup C) - B$ (۲)

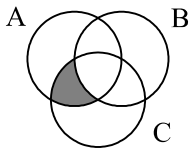
$(A \cap C) - B$ (۱)

$C - (A \cap B)$ (۴)

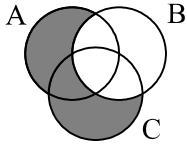
$B - (A \cap C)$ (۳)

پاسخ: گزینه ۱ نمودار ون مربوط به تمام گزینه ها را رسم می کنیم. بررسی گزینه ها:

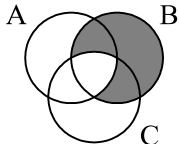
گزینه ۱: $(A \cap C) - B$



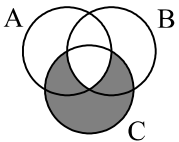
گزینه ۲: $(A \cup C) - B$



گزینه ۳: $B - (A \cap C)$



گزینه ۴: $C - (A \cap B)$



۳۷. اگر مجموعه‌های $A = \{2, -3\}$ و $B = \{b, |a|\}$ با هم مساوی باشند، حاصل $b - 3|a|$ کدام است؟

۱۲- [۴]

۱۱ [۳]

۹- [۲]

۹ [۱]

پاسخ: گزینه ۲ چون دو مجموعه برابرند، پس هر عضو B باید برابر با عضوهای A باشد، پس دو حالت داریم:

۱) $b = 2, |a| = -3$

۲) $b = -3, |a| = 2$

حالت اول نادرست است، چون قدر مطلق a نمی‌تواند برابر -3 باشد.

پس:

$b = -3, |a| = 2$

$b - 3|a| = -3 - 3(2) = -3 - 6 = -9$

۳۸. کدام یک از عبارت‌های زیر، یک مجموعه را مشخص نمی‌کند؟

۴ [۴] اعداد صحیح بین -2 و -1

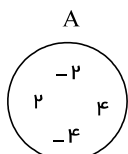
۳ [۳] سه فوتبالیست مشهور ایران

۲ [۲] پنج عدد فرد متوالی شروع با ۳

۱ [۱] اعداد اول زوج

پاسخ: گزینه ۳ گزینه اول بیانگر مجموعه $\{2\}$ است. گزینه دوم بیانگر مجموعه $\{3, 5, 7, 9, 11\}$ می‌باشد. گزینه سوم عضوهای مشخصی ندارد، پس یک مجموعه را مشخص نمی‌کند. گزینه چهارم بیانگر مجموعه تهی است.

۳۹. باتوجه به نمودار زیر کدام عبارت صحیح نمی‌باشد؟



$\{-2, 2\} \subseteq A$ [۲]

$\{-2, 0, 2\} \subseteq A$ [۴]

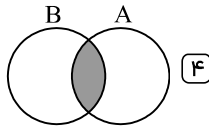
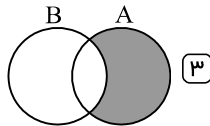
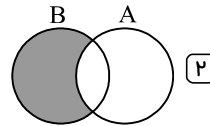
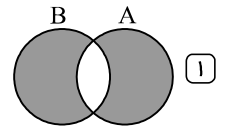
$\emptyset \subseteq A$ [۱]

$\{-2, 2, -4, 4\} \subseteq A$ [۳]

پاسخ: گزینه ۴ می‌دانیم برای هر مجموعه دلخواه مثل A همواره $\emptyset \subseteq A$ و $A \subseteq A$ پس گزینه‌های ۱ و ۳ عبارت‌های صحیحی هستند. هم‌چنین اگر تمام اعضای مجموعه‌ای مثل B در A نیز موجود باشد می‌گوییم B زیرمجموعه A است و می‌نویسیم: $B \subseteq A$ بنابراین $B = \{-2, 2\} \subseteq \{-2, 2, 4, -4\} = A$ پس گزینه ۳ هم عبارت صحیح است.

اما در گزینه ۴، چون عدد ۰ عضو A نیست پس عبارت داده شده صحیح نیست.

۴۰. کدام نمودار مشخص کننده مجموعه $A - (A \cap B)$ می باشد؟



پاسخ: گزینه ۳ ابتدا $A \cap B$ را مشخص میکنیم که قسمت مشترک A و B است. حال $A - (A \cap B)$ شامل نقاطی است که در A وجود دارند ولی در $A \cap B$ وجود ندارند، که نمودار گزینه (۳) نمایش این مجموعه است.

۴۱. کدام یک از عبارتهای زیر مجموعه تهی را مشخص می کند. (تهران - خرداد ۹۵)

- (۱) عددهای صحیح بین ۲- و ۲ (۲) شمارنده های اول عدد ۱۷ (۳) عددهای طبیعی بین ۵ و ۶ (۴) عددهای منفی و بزرگتر از ۳-

پاسخ: گزینه ۳ گزینه ۱ بیانگر مجموعه $\{-1, 0, 1\}$ می باشد. گزینه ۲ بیانگر مجموعه $\{17\}$ است. گزینه ۳ بیانگر مجموعه تهی است، چون هیچ عدد طبیعی بین ۵ و ۶ وجود ندارد. گزینه ۴ هم بیانگر مجموعه $\{-2, -1\}$ است.

۴۲. با توجه به A کدام گزینه صحیح نیست؟

$$A = \{ \{ \}, \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \{ \emptyset \} \} \}$$

- (۱) $\emptyset \in A$ (۲) $\{ \{ \emptyset \} \} \subset A$ (۳) $\{ \{ \emptyset \} \} \not\subset A$ (۴) $\{ \{ \{ \emptyset \} \} \} \subset A$

پاسخ: گزینه ۳ برای حل این سوال کافی است دقت کنید که $\emptyset = \{ \}$ است.

به این ترتیب گزینه (۳)، غلط است زیرا A دارای عضو $\{ \emptyset \}$ یا $\{ \{ \} \}$ است پس زیرمجموعه تک عضوی $\{ \{ \{ \} \} \}$ یا $\{ \{ \emptyset \} \}$ را دارد.

۴۳. از بین زیرمجموعه های مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی، یک زیرمجموعه به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه این مجموعه شامل هیچ عدد اولی نباشد چقدر است؟

- (۱) $\frac{5}{9}$ (۲) $\frac{1}{16}$ (۳) $\frac{1}{32}$ (۴) $\frac{15}{32}$

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی را می نویسیم $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ، تعداد زیرمجموعه های مجموعه A برابر 2^9 می باشد. حال زیرمجموعه های مجموعه A که شامل اعداد اول نباشد.

نکته: اگر مجموعه A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه هایی که شامل r عضو نباشند، از رابطه 2^{n-r} محاسبه می شود.

اعداد اول یک رقمی ۲ و ۳ و ۵ و ۷. حال تعداد زیرمجموعه هایی که شامل ۴ عضو بالا نباشند، برابر $2^{9-4} = 2^5$

$$\text{احتمال اینکه زیرمجموعه انتخاب شده شامل هیچ عدد اولی نباشد} = \frac{2^5}{2^9} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

۴۴. اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند و داشته باشیم $A \subseteq B$ ، در این صورت حاصل عبارت $(A \cup B) - (A - B)$ کدام است؟

- (۱) A (۲) B (۳) $\emptyset$ (۴) $A \cap B$

پاسخ: گزینه ۲ $A \subseteq B$ یعنی هر عضو A عضوی از B است. در نتیجه:

$$A - B = \emptyset, A \cup B = B$$

بنابراین:

$$(A \cup B) - (A - B) = B - \emptyset = B$$

۴۵. اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{\{3\}, 4\}$ و $C = \{3, \{2\}, 1\}$ ، حاصل $(A - B) \cap C$ کدام گزینه است؟

- (۱) $\{1, 3\}$ (۲) $\{1, \{3\}\}$ (۳) $\{1, 2, 3\}$ (۴) $\{1, \{2\}, 3\}$

پاسخ: گزینه ۱

$$A - B = \{1, 2, 3\} \quad (A - B) \cap C = \{1, 3\}$$

۴۶. بزرگ ترین عضو مجموعه $\{3x - 5 \mid x \in \mathbb{Z}, 2^x < \sqrt{11}\}$ چه عددی است؟

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) ۴ (۴) -۵

پاسخ: گزینه ۱

$$2^x < \sqrt{11} \rightarrow \begin{cases} 2^1 = 2 < \sqrt{11} \rightarrow x = 1 \rightarrow 3x - 5 = 3(1) - 5 = -2 \\ 2^0 = 1 < \sqrt{11} \\ 2^{-1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < \sqrt{11} \\ 2^{-2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} < \sqrt{11} \\ \vdots \end{cases}$$

۴۷. کدام یک از مجموعه‌های زیر مجموعه $A = \{(\frac{1}{p})^k \mid k \in \mathbb{Z}, -1 < k^2 < 4\}$ را نشان می‌دهد؟

- ☐ ۱ $\{1, 2, \frac{1}{p}\}$
☐ ۲ $\{0, -2, -\frac{1}{p}\}$
☐ ۳ $\{0, 2, -\frac{1}{p}\}$
☐ ۴ $\{-1, 0, 1\}$

پاسخ: گزینه ۱ همان‌طور که می‌دانیم هر عددی به توان زوج عددی مثبت است پس k^2 مقداری نامنفی است پس باید به دنبال اعدادی بگردیم که توان دوم آن‌ها

کم‌تر از ۴ باشد پس ۱ و -۱ و ۰ را داریم با جای گذاری این اعداد در $(\frac{1}{p})^k$ داریم: $A = \{1, \frac{1}{p}, 2\}$

$$\left(\frac{1}{p}\right)^0 = 1 \quad \left(\frac{1}{p}\right)^1 = \frac{1}{p} \quad \left(\frac{1}{p}\right)^{-1} = 2$$

۴۸. صورت دیگر مجموعه $\{x \mid x \in N, x^2 < 25\}$ کدام است؟

- ☐ ۱ $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
☐ ۲ $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
☐ ۳ $\{0, 1, 2, 3, \dots, 24\}$
☐ ۴ $\{x \mid x \in N, x < \sqrt{25}\}$

پاسخ: گزینه ۴

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{x \in N \mid x < \sqrt{25} = 5\}$$

x	x^2
۱	$1^2 = 1$
۲	$2^2 = 4$
۳	$3^2 = 9$
۴	$4^2 = 16$
۵	غیر قابل قبول $5^2 = 25$

۴۹. مجموعه A دارای n عضو است. اگر سه عضو متمایز به A اضافه شود، تعداد ۱۱۲ زیرمجموعه به تعداد زیرمجموعه‌های آن اضافه می‌شود، n کدام است؟

- ☐ ۱ ۲
 ☐ ۲ ۴
 ☐ ۳ ۵
 ☐ ۴ ۶

پاسخ: گزینه ۲ را تعداد اعضای مجموعه A در نظر می‌گیریم پس تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه A برابر 2^n می‌شود. حال اگر تعداد اعضای مجموعه A را سه واحد افزایش دهیم $(n+3)$ تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر 2^{n+3} می‌شود و در نتیجه خواهیم داشت:

$$2^{n+3} - 2^n = 112 \Rightarrow 2^n(2^3 - 1) = 112$$

$$\Rightarrow 2^n(7) = 112 \Rightarrow 2^n = \frac{112}{7} = 16 \Rightarrow 2^n = 2^4 \Rightarrow n = 4$$

۵۰. کدام گزینه نمایانگر یک مجموعه نیست؟ (تهران - خرداد ۹۵)

- ☐ ۱ اعداد اول دو رقمی کوچک‌تر از ۲۰
 ☐ ۲ دانش‌آموزان کلاس شما
 ☐ ۳ انسان‌های قد بلند
 ☐ ۴ اعداد اول کوچک‌تر از ۱

پاسخ: گزینه ۳ گزینه ۱ بیانگر مجموعه‌ای $\{11, 13, 17, 19\}$ است. گزینه ۲ شامل عضوهای مشخص است. گزینه ۳ به طور دقیق، افراد را مشخص نکرده است. گزینه ۴ بیانگر مجموعه تهی است، چون هیچ عدد اولی کوچک‌تر از یک نیست.

۵۱. کدام مجموعه تهی است؟

- ☐ ۱ $\{\{\}\}$
☐ ۲ $\{\emptyset\}$
☐ ۳ $\{\}$
☐ ۴ تمامی گزینه‌ها

پاسخ: گزینه ۳ مجموعه‌های $\{\emptyset\}$ و $\{\{\}\}$ تهی نیستند و دارای عضوی به نام تهی هستند اما مجموعه $\{\}$ تهی است.

۵۲. مجموعه $A = \left\{ \sqrt{x^2 + 1} \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 3 \right\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

۳۲ (۴)

۱۶ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا اعضای مجموعه A را مشخص می‌کنیم:

$$A = \left\{ \sqrt{5}, \sqrt{2}, 1 \right\}$$

از طرفی می‌دانیم هر مجموع n عضوی به تعداد 2^n زیرمجموعه دارد. در نتیجه مجموعه A به تعداد $2^3 = 8$ زیرمجموعه دارد.

۵۳. مجموعه $A = \{x^y \mid x, y \in \mathbb{Z}, xy = 8\}$ چند زیرمجموعه دو عضوی دارد؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا اعضای مجموعه A را مشخص می‌کنیم.

x	y	xy	x^y
۱	۸	۸	$1^8 = 1$
۲	۴	۸	$2^4 = 16$
۴	۲	۸	$4^2 = 16$
۸	۱	۸	$8^1 = 8$
-۱	-۸	۸	$(-1)^{-8} = 1$
-۲	-۴	۸	$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$
-۴	-۲	۸	$(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$
-۸	-۱	۸	$(-8)^{-1} = \frac{1}{(-8)^1} = -\frac{1}{8}$

عضوهای تکراری را حذف می‌کنیم.

$$A = \left\{ 1, 16, 8, \frac{1}{16}, -\frac{1}{8} \right\} \Rightarrow n(A) = 5$$

برای مجموعه ۵ عضوی A تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی به صورت $\frac{5 \times 4}{2} = 10$

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه n عضوی به صورت $\frac{n(n-1)}{2}$ به دست می‌آید.

۵۴. روی یک تاس اعداد $\sqrt{1}$ و $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ و $\sqrt{4}$ و $\sqrt{5}$ و $\sqrt{6}$ نوشته شده است. اگر این تاس را دو بار پرتاب کنیم، احتمال اینکه حاصل ضرب دو عدد رو شده عدد صحیح باشد چقدر است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{2}{9}$ (۳)

$\frac{7}{36}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا تمام حالت‌های ممکن برای پرتاب دو تاس را محاسبه می‌کنیم:

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

حال مجموعه A را اعداد صحیح در حاصل ضرب دو عدد رو شده در تاس در نظر می‌گیریم.

$$\left\{ (\sqrt{1}, \sqrt{1}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{3}, \sqrt{3}), (\sqrt{4}, \sqrt{4}), (\sqrt{5}, \sqrt{5}), (\sqrt{6}, \sqrt{6}), (\sqrt{1}, \sqrt{4}), (\sqrt{4}, \sqrt{1}) \right\} \Rightarrow n(A) = 8$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

۵۵. اگر تاسی را دو بار پرتاب کنیم احتمال اینکه مجموع دو عدد رو شده ۷ باشد چقدر است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{1}{5}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ اگر تاس را دو بار پرتاب کنیم، کل حالت‌ها برابر $n(S) = 6 \times 6 = 36$ می‌شود. حال حالت‌هایی را که مجموع دو تاس ۷ می‌شود، بررسی

می‌کنیم.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ a & b \end{pmatrix} \mid (2,5)(3,4)(4,3)(5,2)(6,1) \right\}$$

پس کل حالت‌هایی که مجموع دو تاس برابر با ۷ می‌شود، یعنی $n(A) = 6$ حال:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

۵۶. مجموعه $A = \{x^y \mid x, y \in \mathbb{Z}, xy = 4\}$ چند عضو دارد؟

۴ تا ۷

۳ تا ۸

۲ تا ۴

۱ تا ۳

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا با توجه به راهبرد الگوسازی حالت‌های مختلف $xy = 4$ را به دست می‌آوریم:

x	y	xy
۱	۴	۴
۲	۲	۴
۴	۱	۴
-۱	-۴	۴
-۲	-۲	۴
-۴	-۱	۴

$$x^y = \{1^4, 2^2, 4^1, (-1)^{-4}, (-2)^{-2}, (-4)^{-1}\}$$

$$= \{1, 4, 4, 1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\} = \{1, 4, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\}$$

$$\rightarrow n(A) = 4$$

۵۷. مجموعه $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -6 \leq 3x < 6\}$ دارای چند عضو می‌باشد؟

۴ تا ۱۳

۳ تا ۱۲

۲ تا ۵

۱ تا ۴

پاسخ: گزینه ۱

$$-6 \leq 3x < 6 \xrightarrow{\text{دو طرف را بر ۳ تقسیم می‌کنیم}} -2 \leq x < 2 \rightarrow \{-2, -1, 0, 1\}$$

۵۸. مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید. کدام مجموعه‌ها با هم برابر هستند؟

$$A = \{0, 1, -1\} \quad B = \{x \mid x \in A, -1 \leq x < 2\} \quad C = \{x \mid x \in A, x^2 = 1\}$$

$A = B = C$ (۴) $A = B$ (۳) $B = C$ (۲) $A = C$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ اعضای هر مجموعه را بدست می‌آوریم:

$$B = \{x \mid x \in A, -1 \leq x < 2\} = \{0, 1, -1\}$$

$$C = \{x \mid x \in A, x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$$

$$A = B \Rightarrow A \neq C$$

$$B \neq C$$

$$A = \{0, 1, -1\}$$

۵۹. اعضای مجموعه $A = \{2x - 7 \mid x \in \mathbb{N}\}$ کدام است؟

۴ تا $\{-7, -5, -3, \dots\}$

۳ تا $\{-5, -3, -1, \dots\}$

۲ تا $\{-5, -3, -1\}$

۱ تا $\{1, 3, 5, \dots\}$

پاسخ: گزینه ۳

$$A = \{2x - 7 \mid x \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{-5, -3, -1, \dots\}$$

$$2x - 7 \begin{cases} 2(1) - 7 = 2 - 7 = -5 \\ 2(2) - 7 = 4 - 7 = -3 \\ 2(3) - 7 = 6 - 7 = -1 \end{cases}$$

۶۰. در چند زیرمجموعه از مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ اختلاف بین کوچکترین عضو و بزرگترین عضو برابر ۴ است؟ (روبوکاپ - ۱۳۸۶)

۴ تا ۶۴

۳ تا ۴۸

۲ تا ۳۲

۱ تا ۲۴

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا عدد ۱ و ۵ را در نظر می‌گیریم که در زیرمجموعه‌ای قرار داشته باشند. اعداد بزرگتر از ۵ که نمی‌توانند در این زیرمجموعه قرار بگیرند چون

اختلافشان بیشتر از ۴ می‌شود. اعداد ۲ و ۳ و ۴ نیز می‌توانند در این زیرمجموعه باشند یا نباشند. پس برای هر کدام ۲ حالت وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب: $2 \times 2 \times 2 = 8$ برای ۲ و ۶ نیز مانند قسمت قبل ۸ حالت وجود دارد همچنین برای ۳ و ۷، ۴ و ۸ هر کدام ۸ حالت و در نتیجه $4 \times 8 = 32$

۶۱. مجموعه‌های $A = \{2, 4, 6\}$ ، $B = \{1, 3, 5\}$ و $C = \{1, 2, 3, 4\}$ را در نظر بگیرید، کدام عبارت در مورد این سه مجموعه درست است؟

- ۱ $2 \in B$ ۲ $\{5, 6\} \subseteq B$ ۳ $2 \subseteq A$ ۴ $B \not\subseteq C$

پاسخ: گزینه ۴ عضو مجموعه B نیست بنابراین $2 \in B$ نادرست است.

۶ عضو مجموعه B نیست بنابراین $\{5, 6\} \subseteq B$ نادرست است.

۲ عضوی از A است $(2 \in A)$ و نه زیرمجموعه‌ی A . پس $2 \subseteq A$ نادرست است.

عضو ۵ در B وجود دارد اما در C وجود ندارد بنابراین B زیرمجموعه C نیست: $B \not\subseteq C$ پس این عبارت صحیح است.

۶۲. تعداد ۴ سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه حداقل یک سکه "رو" ظاهر شود کدام است؟

- ۱ $\frac{12}{16}$ ۲ $\frac{13}{16}$ ۳ $\frac{7}{8}$ ۴ $\frac{15}{16}$

پاسخ: گزینه ۴ تعداد کل حالت‌های ممکن در پرتاب ۴ سکه برابر $2^4 = 16$ است. احتمال اینکه هیچ سکه‌ای رو نیاید برابر $\frac{1}{16}$ است. پس احتمال اینکه حداقل

یک سکه "رو" بیاید برابر است با: $1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

۶۳. اگر A مجموعه اعداد اول یک رقمی و B مجموعه اعداد فرد طبیعی و $C = \{x | x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x < 8\}$ باشد، عبارت

$(A - (C \cup B)) \cup (B \cap A)$ دارای چند عضو می‌باشد؟

- ۱ ۲ ۲ ۴ ۳ ۳ ۴ ۷

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا مجموعه‌های A و B و C را با اعضایشان مشخص می‌کنیم:

$$A = \{2, 3, 5, 7\} \quad B = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\Rightarrow (C \cup B) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, \dots\}$$

$$\Rightarrow A - (C \cup B) = \{2, 3, 5, 7\} - \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, \dots\} = \{\}$$

$$\Rightarrow B \cap A = \{3, 5, 7\}$$

$$\Rightarrow (A - (C \cup B)) \cup (B \cap A) = \{\} \cup \{3, 5, 7\} = \{3, 5, 7\}$$

تعداد اعضای عبارت صورت سوال برابر ۳ می‌شود.

۶۴. اگر $A \subseteq B$ باشد، حاصل $[(A - B)] \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ کدام است؟

- ۱ A ۲ B ۳ $B - A$ ۴ $\emptyset$

پاسخ: گزینه ۲

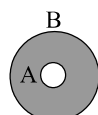
$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A \quad (۱)$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset \quad (۲)$$

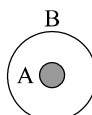
$$\Rightarrow [(A - B)] \cup (B - A) \cup (A \cap B) \xrightarrow{(۱), (۲)} \emptyset \cup (B - A) \cup A$$

$$(B - A) \cup A = B$$

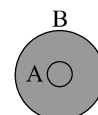
و باتوجه به نمودار و ن:



$B - A$



A



$(B - A) \cup A$

۶۵. مجموعه A چند عضو دارد؟ $A = \{2^{400} + 2, 2^{400} + 4, 2^{400} + 6, \dots, 2^{401}\}$

۳۹۹ (۴)

۴۰۰ (۳)

۲^{۴۰۰} (۲)

۲^{۳۹۹} (۱)

پاسخ: گزینه ۱ اعضای مجموعه A را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2^{400} + 2 \times 1$$

$$2^{400} + 2 \times 2$$

$$2^{400} + 2 \times 3$$

⋮

$$2^{400} + 2^{400} = 2 \times 2^{400} = 2^{401} \quad 2^{400} \div 2 = 2^{399}$$

اعضای این مجموعه (A) از جمع اعداد زوج از ۲ تا 2^{400} با 2^{400} بدست می‌آیند. تا 2^{400} نصف اعداد زوج هستند.

پس این مجموعه 2^{399} عضو دارد.

۶۶. کدام یک از مجموعه‌های زیر معرف مجموعه تهی است؟ (ثلاث باباجانی - دی ۹۴)

اعداد صحیح بین ۱ و ۱ - (۴)

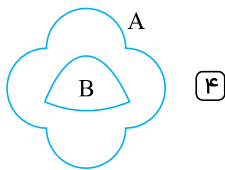
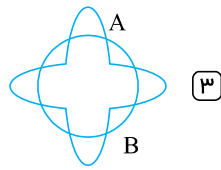
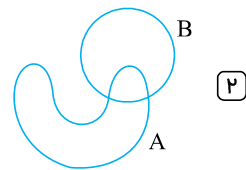
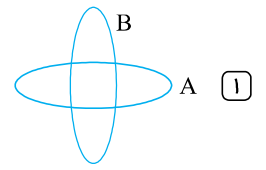
اعداد گنگ بین ۲ و ۳ (۳)

اعداد طبیعی بین ۱ و ۱ - (۲)

اعداد اول یک رقمی (۱)

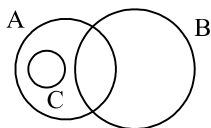
پاسخ: گزینه ۲ گزینه ۱ بیانگر مجموعه $\{2, 3, 5, 7\}$ است. گزینه ۲ بیانگر مجموعه تهی است، چون هیچ عدد طبیعی ۱ و ۱ - وجود ندارد. در گزینه ۳ بی‌نهایت عدد گنگ بین ۲ و ۳ وجود دارد. گزینه ۴ بیانگر مجموعه $\{0\}$ می‌باشد.

۶۷. کدام نمودار وضعیت متفاوتی را از A و B نشان می‌دهد؟



پاسخ: گزینه ۴ در نگاه اول سؤال بی‌ربط به نظر می‌رسد! ولی کمی که دقت کنید ...

در گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳ و A و B بخشی مشترک دارند و قسمت‌هایی هم غیرمشترک، ولی در گزینه (۴)، $B \subseteq A$ است و تمام اعضای B با A مشترک است.



۶۸. برای سه مجموعه ناتهی A, B, C در شکل زیر، حاصل کدام عبارت تهی است؟

$$(A \cap B) - C \quad (۲)$$

$$(A - B) - C \quad (۱)$$

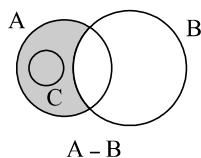
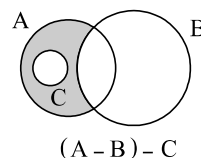
$$(A \cap B) \cap C \quad (۴)$$

$$(A - B) \cap C \quad (۳)$$

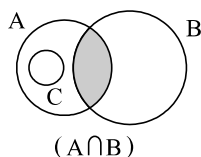
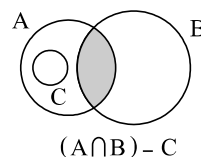
پاسخ: گزینه ۴ به کمک نمودار و ن به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم.

بررسی گزینه‌ها:

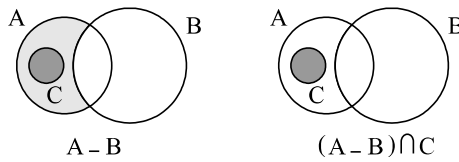
گزینه ۱: نادرست است.



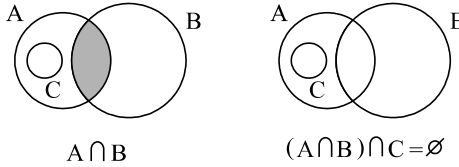
گزینه ۲: نادرست است.



گزینه ۳: نادرست است.



گزینه ۴: درست است.



۶۹. اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \geq |x|\}$ و $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 9\}$ باشند، مجموعه $A - B$ چند زیرمجموعه دارد؟

۴ ☐

۱۶ ☐

۳۲ ☐

۶۴ ☐

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا دو مجموعه A و B را با اعضایشان مشخص می‌کنیم:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \geq |x|\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 9\} = \{1, 2\}$$

حال مجموعه $A - B$ را تشکیل می‌دهیم:

$$A - B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} - \{1, 2\} = \{-3, -2, -1, 0, 3\}$$

مجموعه $A - B$ ، ۵ عضو دارد پس تعداد $2^5 = 32$ زیرمجموعه دارد.

۷۰. اگر $n(A \cup B) = 12$ ، $n(A \cap B) = 5$ و $n(A - B) = 4$ ، حاصل $n(B - A)$ کدام است؟

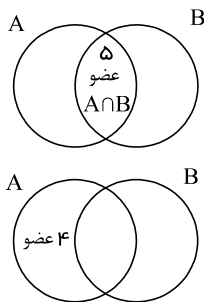
۳ ☐

۶ ☐

۴ ☐

۵ ☐

پاسخ: گزینه ۴ با توجه به نمودار و تعداد عضوهای هر قسمت را داخل آن قرار می‌دهیم.



در نتیجه در قسمت $n(B - A)$ باید ۳ عضو داشته باشیم چون:

$$n(A \cup B) = 12$$

روش دوم:

باتوجه به رابطه داریم:

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow 12 = 4 + n(B - A) + 5 \Rightarrow n(B - A) = 3$$

۷۱. اگر به اعضای مجموعه‌ای سه عضو جدید اضافه کنیم، زیرمجموعه‌های آن ۲۲۴ واحد بیش‌تر می‌شود. این مجموعه چند عضو دارد؟

۸ ☐

۷ ☐

۶ ☐

۵ ☐

پاسخ: گزینه ۱ اگر تعداد اعضای مجموعه را n در نظر بگیریم، 2^n زیرمجموعه خواهد داشت. حال با اضافه کردن سه عضو یعنی $n + 3$ تعداد زیرمجموعه‌های آن

برابر 2^{n+3} می‌شود.

در نتیجه:

$$2^{n+3} - 2^n = 224 \Rightarrow 2^n(2^3 - 1) = 224$$

$$2^n \times 7 = 224$$

$$2^n = \frac{224}{7} = 32 \Rightarrow 2^n = 32 = 2^5 \Rightarrow n = 5$$

۷۲. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که حاصل ضرب عددهای رو شده برابر ۱۲ شود؟

$$\frac{6}{36} \quad \text{④}$$

$$\frac{4}{36} \quad \text{③}$$

$$\frac{3}{36} \quad \text{②}$$

$$\frac{2}{36} \quad \text{①}$$

پاسخ: گزینه ۳ در پرتاب دو تاس تعدد کل حالت‌های ممکن برابر $6 \times 6 = 36$ است. حال حالت‌هایی را که ضرب دو عدد تاس ۱۲ می‌شود، بررسی می‌کنیم.

$$\{(\overset{\substack{\uparrow \\ \text{تاس دوم}}}{6}, \overset{\substack{\downarrow \\ \text{تاس اول}}}{2}), (3, 4), (6, 2), (4, 3)\}$$

$$\frac{4}{36}$$

پس احتمال آن برابر است با:

۷۳. مجموعه عددهای گویا به زبان ریاضی برابر کدام مجموعه زیر است؟

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid b \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{④}$$

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\} \quad \text{③}$$

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{②}$$

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{①}$$

پاسخ: گزینه ۳ عددهای گویا اعدادی به صورت $\frac{a}{b}$ هستند که a و b از مجموعه اعداد صحیح و b همواره مخالف صفر است (چون مخرج کسر همواره باید مخالف صفر باشد)

۷۴. کدام مجموعه با مجموعه A برابر است؟

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^x \mid x \in \mathbb{N}, -2 \leq x \leq 4 \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right\} \quad \text{④}$$

$$\{1, 2, 3\} \quad \text{③}$$

$$\left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{2} \right\} \quad \text{②}$$

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right\} \quad \text{①}$$

پاسخ: گزینه ۲ اعدادی که جای x جایگزین می‌شوند عبارتند از: ۴، ۳، ۲، ۱ پس داریم:

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^x \mid x \in \mathbb{N}, -2 \leq x \leq 4 \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \right\}$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^x = \left(\frac{1}{2} \right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^4 = \frac{1}{16}$$

۷۵. تعداد زیرمجموعه‌های محض (تمام زیرمجموعه‌ها به جز خود مجموعه) مجموعه A برابر ۲۰۴۷ است. تعداد اعضای مجموعه A برابر است با:

$$9 \quad \text{④}$$

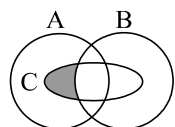
$$10 \quad \text{③}$$

$$11 \quad \text{②}$$

$$12 \quad \text{①}$$

پاسخ: گزینه ۲

$$2^n - 1 = 2047 \Rightarrow 2^n = 2048 \Rightarrow 2^n = 2^{11} \Rightarrow n = 11$$



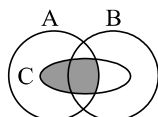
$$(C - B) \cup A \quad \text{②}$$

$$(B - A) \cap (C - B) \quad \text{①}$$

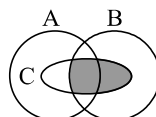
$$(A - B) \cup (B \cap C) \quad \text{④}$$

$$(A \cap C) - (C \cap B) \quad \text{③}$$

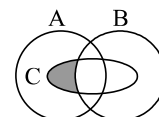
پاسخ: گزینه ۳



$$(A \cap C)$$



$$(C \cap B)$$



$$(A \cap C) - (C \cap B)$$

۷۷. عدد ۳ عضو کدام یک از مجموعه‌های زیر نیست؟

- (۱) مجموعه مقسوم‌علیه‌های اول عدد ۶
(۲) مجموعه سه عدد فرد متوالی با شروع از عدد یک
(۳) مضارب طبیعی عدد ۹
(۴) مضارب طبیعی عدد ۳

پاسخ: گزینه ۳ مجموعه‌های متناظر با هر گزینه را می‌نویسیم:

گزینه (۱) $\{2, 3\}$

گزینه (۲) $\{1, 3, 5\}$

گزینه (۳) $\{9, 18, 27, \dots\}$

گزینه (۴) $\{3, 6, 9, \dots\}$

بنابراین فقط در گزینه (۳) عدد ۳ عضو مجموعه داده شده نیست.

۷۸. شایان با مترو به مدرسه می‌رود. قطارهای مترو هر ۱۰ دقیقه یک‌بار به ایستگاه می‌رسند. شایان همیشه بین ساعات ۵:۰۰ تا ۶:۰۰ به ایستگاه مترو می‌رسد. احتمال این که شایان پس از رسیدن به ایستگاه حداکثر ۵ دقیقه معطل شود چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{5}{8}$

پاسخ: گزینه ۱ زمان ایستادن عددی بین ۰ تا ۱۰ دقیقه است. احتمال این که معطلی شایان بین ۰ تا ۵ باشد؛ یعنی نصف زمان حداکثر انتظار باشد، برابر است با $\frac{1}{2}$.

نتیجه‌ی اخلاقی: برخی مسائل از سادگی، سخت به نظر می‌رسند!

۷۹. اگر A, B, C و D چهار مجموعه باشند. به طوری که $((A \cup B) - C) - D = D$. آن گاه حاصل $A \cup B \cup C \cup D$ همواره برابر است با:

- (۱) $\emptyset$ (۲) C (۳) D (۴) $A \cup B$

پاسخ: گزینه ۲ در مجموعه $((A \cup B) - C) - D$ تمام عناصری که بین D و $(A \cup B) - C$ مشترک است حذف شده است.

$$\underbrace{((A \cup B - C) - D) \cap D = \emptyset}_{\text{طبق فرض } D=}$$

پس $D = \emptyset$. حال داریم:

$$(A \cup B) - C = \emptyset \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

در نتیجه:

$$A \cup B \cup C \cup D = C$$

۸۰. مریم یک عدد دو رقمی به تصادف انتخاب کرده است. احتمال این که حاصل ضرب ارقام عددی زوج باشد چه قدر است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{8}$ (۳) $\frac{7}{14}$ (۴) $\frac{13}{18}$

پاسخ: گزینه ۴ در صورتی حاصل ضرب زوج خواهد بود که یکی از ارقام زوج باشد. برای حل سؤال از اصل متمم استفاده می‌کنیم. ابتدا تمامی اعداد دو رقمی را می‌شماریم و سپس اعدادی که هر دو رقم آن‌ها فرد است را از کل حالات کم می‌کنیم:

$$9 \times 10 = 90$$

$$5 \times 5 = 25$$

$$90 - 25 = 65$$

بنابراین احتمال برابر است با:

$$\frac{65}{90} = \frac{13}{18}$$

۸۱. یک سکه را دوبار می‌اندازیم. برای آنکه اصلاً شیر نیاید چه احتمالی وجود دارد؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳ در هر بار پرتاب سکه ۲ حالت وجود دارد پس در کل $2 \times 2 = 4$ حالت بوجود می‌آید.

در این ۴ حالت تنها در یک حالت اصلاً شیر نمی‌آید.

در نتیجه احتمال مطلوب برابر با $\frac{1}{4}$ است.

۸۲. اگر $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 20\}$ ، $B = \{3x - 7 | x \in A\}$ و $B \subseteq A$ باشند، مجموعه B چند عضو دارد؟

- ۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا اعضای A را نمایش می‌دهیم:

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 20\} = \{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$$

تمام اعضای B را نیز مشخص می‌کنیم.

$$B = \{3x - 7 | x \in A\} = \{-4, -1, 2, 5, 8, \dots, 53\}$$

باتوجه به اینکه $B \subseteq A$ است، پس اعضای B باید به صورت زیر باشند:

$$B = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\} \quad n(B) = 7$$

۸۳. اگر $A \cap B = \emptyset$ ، حاصل عبارت $(A - B) \cap (B - A)$ کدام است؟

- ۱) A ۲) B ۳) $A - B$ ۴) $\emptyset$

پاسخ: گزینه ۴ اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد، در این صورت $B - A = B$ و $A - B = A$ در این صورت:

$$(A - B) \cap (B - A) = A \cap B = \emptyset$$

۸۴. اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، کدام رابطه زیر همواره درست است؟

- ۱) $(A \cup B) \subseteq A$ ۲) $B - A = B$ ۳) $B \subseteq (A \cap B)$ ۴) $(A \cap B) \subseteq A$

پاسخ: گزینه ۴ در حالت کلی، اشتراک دو مجموعه دلخواه، همواره زیرمجموعه آن دو مجموعه می‌باشد.

یعنی:

$$\begin{cases} A \cap B \subseteq A \\ A \cap B \subseteq B \end{cases}$$

۸۵. مجموعه $A = \{2^{x-3y} | x - 1 = 3y\}$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

- ۱) $\{16\}$ ۲) $\{32\}$ ۳) $\{2\}$ ۴) $\{-5, 5\}$

پاسخ: گزینه ۳

$$A = \{2^{x-3y} | x - 1 = 3y\} \quad \begin{aligned} x - 1 = 3y &\rightarrow x - 3y = 1 \\ 2^{x-3y} = 2^1 = 2 &\rightarrow A = \{2\} \end{aligned}$$

۸۶. مجموعه $A = \{x | \frac{15}{x} \in \mathbb{Z}\}$ دارای چند عضو است؟

- ۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{15}{x} \rightarrow \begin{cases} \frac{15}{+1} = 15 \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{15}{-1} = -15 \in \mathbb{Z} \\ \frac{15}{+3} = 5 \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{15}{-3} = -5 \in \mathbb{Z} \\ \frac{15}{+5} = 3 \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{15}{-5} = -3 \in \mathbb{Z} \\ \frac{15}{+15} = 1 \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{15}{-15} = -1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

از طرفی کسرهایی به صورت $\frac{1}{a}$ که $a \in \mathbb{Z}$ نیز حاصل کسر را صحیح می‌کند. در نتیجه مجموعه‌ی فوق بی‌شمار عضو دارد.

۸۷. اولین جعبه شامل دو مهره سیاه و دو مهره سبز است. دومین جعبه شامل چهار مهره سبز و شش مهره قرمز است. یک مهره به طور تصادفی از جعبه دوم انتخاب کرده و در جعبه‌ی اول قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به طور تصادفی از جعبه‌ی اول انتخاب کرده و در جعبه‌ی دوم قرار می‌دهیم. احتمال آنکه رنگ مهره‌های جعبه‌ها تغییر نکنند کدام است؟

- ۱) ۱۲٪ ۲) ۱۸٪ ۳) ۳۶٪ ۴) ۲۴٪

پاسخ: گزینه ۳

۲ تا سیاه	۴ تا سبز
۲ تا سبز	۶ تا قرمز

جعبه ی اول جعبه ی دوم

اگر بخواهیم رنگ مهره‌های جعبه‌ها تغییر نکند، دو حالت می‌تواند اتفاق بیفتد. حالت اول اینکه از جعبه دوم مهره سبز انتخاب شود و در جعبه اول قرار گیرد و سپس از جعبه اول مهره سبز انتخاب شود و در جعبه دوم قرار گیرد.

$$\frac{4}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{50} = 24\%$$

حالت دوم اینکه از جعبه دوم مهره قرمز انتخاب شود و در جعبه اول قرار گیرد و سپس از جعبه اول مهره قرمز انتخاب شود و در جعبه دوم قرار گیرد.

$$\frac{6}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{50} = 12\%$$

مجموع احتمال‌های دو حالت برابر است با:

$$24\% + 12\% = 36\%$$

۸۸. فرض کنید A_i نشان‌دهنده مجموعه مقسوم‌علیه‌های عدد i باشد، به عنوان مثال $A_6 = \{1, 2, 3, 6\}$. مجموعه $A_{51} \cup A_{52} \cup \dots \cup A_{100}$ چند عضو دارد؟

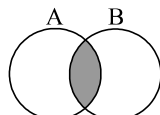
- ۱) ۵۰ عضو ۲) ۱۰۰ عضو ۳) ۲۰۰ عضو ۴) ۳۷۷۵ عضو

پاسخ: گزینه ۲ مجموعه مقسوم‌علیه‌های اعداد ۵۱ تا ۱۰۰، حتماً شامل خود این اعداد می‌باشند همچنین اعداد ۱ تا ۵۰ نیز هر کدام مقسوم‌علیه اعداد ۵۱ تا ۱۰۰ هستند پس در کل این مجموعه ۱۰۰ عضو دارد.

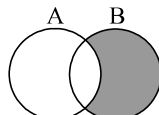
۸۹. مجموعه $(A \cap B) \cup (B - A)$ با کدام مجموعه زیر، مساوی است؟

- ۱) $A \cup B$ ۲) $\emptyset$ ۳) A ۴) B

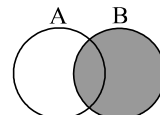
پاسخ: گزینه ۴ با استفاده از نمودار وِن برای دو مجموعه A و B داریم:



$A \cap B$



$B - A$



$(A \cap B) \cup (B - A)$

۹۰. تعداد عضوهای کدام مجموعه با بقیه متفاوت است؟

- ۱) $N - Z$ ۲) $N - W$ ۳) $W - N$ ۴) $W - Z$

پاسخ: گزینه ۳ زیرا مجموعه‌های $N - Z$ ، $N - W$ و $W - Z$ همگی برابر مجموعه تهی هستند و تعداد اعضای آنها صفر است اما در مورد گزینه‌ی (۳) داریم:

$$W - N = \{0\} \Rightarrow n(W - N) = 1$$

۹۱. مجموعه‌ای از ۱۶ عدد طبیعی متمایز در نظر بگیرید که میانگین اعضایش ۱۶ است بزرگترین عددی که ممکن است عضو این مجموعه باشد کدام است؟

- ۱) ۱۶ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۱۳۶

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا مجموع کل اعضای مجموعه را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \text{تعداد} \times \text{میانگین} &= \text{مجموع} \\ &= 16 \times 16 = 256 \end{aligned}$$

برای اینکه یک عضو بتواند بیشترین مقدار شود سایر اعضا می‌بایستی کمترین مقدار را داشته باشند، چون حاصل جمع آنها مقدار ثابتی است و چون عضو مجموعه هستند نمی‌تواند اعداد تکراری باشد. پس ۱۵ عضو دیگر را اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ...، ۱۵ در نظر می‌گیریم و حاصل جمع آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{(15+1) \times 15}{2} = 120$$

حال اگر این مقدار را از مجموع کل آن‌ها کم کنیم بیشترین مقدار برای عضو ۱۶ ام به دست می‌آید:

$$256 - 120 = 136$$

۹۲. کدام یک از مجموعه‌های زیر، تهی است؟

(۱) اعداد طبیعی کوچکتر از ۸ که مکعب کامل باشند.

(۲) اعداد صحیح غیر مثبتی که مربعشان با خودشان برابر باشد.

(۳) اعداد طبیعی که مربعشان کوچکتر از خودشان باشد.

(۴) اعداد اول بین ۱۹ و ۲۹

پاسخ: گزینه ۳: گزینه ۱: ناتهی است ۱ عدد طبیعی کوچکتر از ۸ و مکعب کامل است.

گزینه ۲: ناتهی است. عدد صفر عدد نامثبتی است که مربعش با خودش برابر است.

گزینه ۴: ناتهی است. عدد ۲۳ عدد اول بین دو عدد ۱۹ و ۲۹ است.

۹۳. کدام یک از عبارت‌های زیر مجموعه تهی را نشان می‌دهد؟

(۱) عددهای طبیعی اول مضرب ۷ (۲) عددهای صحیح بین ۱۲ و ۱۴ (۳) عددهای اول زوج دو رقمی (۴) عددهای طبیعی در بازه $[0, 1]$

پاسخ: گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): عددهای طبیعی اول مضرب ۷: $\{7\}$ (توجه: مضارب عدد ۷ به جز خود ۷، همگی مرکب هستند زیرا همه آن‌ها عامل ۷ دارند)

گزینه (۲): عددهای صحیح بین ۱۲ و ۱۴: $\{13\}$

گزینه (۳): هیچ عدد زوج دو رقمی، اول نیست تنها عدد زوج اول عدد ۲ است.

گزینه (۴): عددهای طبیعی در بازه 1 تا 0 : $\{1\}$

۹۴. اگر $A = \{\sqrt[3]{x} | x \in \mathbb{N}, \sqrt{x} \notin \mathbb{N}\}$ ، کدام یک از نتیجه‌گیری‌های زیر صحیح است؟

(۱) $\{2, 4\} \subseteq A$ (۲) $2\sqrt[3]{2} \in A$ (۳) $3 \in A$ (۴) $5 \notin A$

پاسخ: گزینه ۳ بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱):

$$\{2, 3, 4\} \not\subseteq A \xrightarrow{\text{زیرا}} 4 \notin A$$

$$\sqrt[3]{x} = 4 \rightarrow x = 64 \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{64} = 8 \in \mathbb{N} \Rightarrow 4 \notin A \quad \times$$

گزینه (۲):

$$2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16} \Rightarrow x = 16 \in \mathbb{N} \text{ و } \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N} \Rightarrow 2\sqrt[3]{2} \notin A \quad \times$$

گزینه (۳):

$$3 = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = 27 \in \mathbb{N} \quad \sqrt{27} \notin \mathbb{N} \Rightarrow 3 \in A \quad \checkmark$$

گزینه (۴):

$$5 = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x = 125 \in \mathbb{N} \quad \sqrt{125} \notin \mathbb{N} \Rightarrow 5 \in A \quad \times$$

۹۵. اگر M مجموعه مضرب‌های صحیح عدد ۳ و B مجموعه مضرب‌های صحیح عدد ۶ باشند، متمم مجموعه B با علائم ریاضی برابر است با:

(۱) $B' = \{6x | x \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $B' = \{6x + 3 | x \in \mathbb{Z}\}$ (۳) $B' = \{6x - 3 | x \in \mathbb{Z}\}$ (۴) $B' = \{2x - 3 | x \in \mathbb{Z}\}$

پاسخ: گزینه ۳

$$M = \{3x | x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9\}$$

$$B = \{6x | x \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, \dots\}$$

$$B' = \{\dots, -9, -3, 3, 9, \dots\} = \{6x - 3 | x \in \mathbb{Z}\}$$

۹۶. اگر در پرتاب یک تاس بدانیم که عدد رو شده، شمارنده عدد ۶ نمی‌باشد، در این صورت تعداد کل پیشامدها برابر است با:

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱

$$6 \text{ شمارنده‌های } = \{1, 2, 3, 6\}$$

$\{4, 5\}$ = پیشامد مورد نظر

۹۷. اگر مجموعه A ، ۴ عضو و $B - A$ ، ۷ عضو داشته باشند، $A \cup B$ چند عضو دارد؟

(۴) نمی توان تعیین کرد.

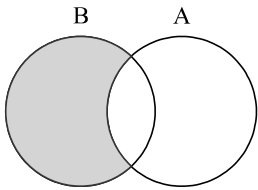
(۳) ۱۵

(۲) ۱۱

(۱) ۷

پاسخ: گزینه ۲ می دانیم $n(B - A) = 7$ یعنی B ، ۷ عضو دارد که قطعاً در A وجود ندارند. بطور دقیق نمی توان گفت که $n(B \cap A)$ چند است اما $n(A \cup B) = 4 + 7 = 11$ است. زیرا با توجه به نمودار ون زیر داریم:

$$(A \cup B) = A \cup (B - A)$$



۹۸. کدام گزینه نادرست است؟ (M مجموعه مرجع است.)

(۴) $M - A = A'$

(۳) $A - M = A'$

(۲) $M \cap A = A$

(۱) $M \cup A = M$

پاسخ: گزینه ۳ جواب درست گزینه ۳ «۳» زیرا: $A - M = \emptyset$

۹۹. اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 10 < (x - 3)^2 < 100\}$ ، آنگاه حاصل جمع عضوهای مجموعه A کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۴۹

(۲) ۴۲

(۱) ۳۶

پاسخ: گزینه ۱ از طرفین نامعادله $10 < (x - 3)^2 < 100$ جذر می گیریم:

$$\sqrt{10} < \sqrt{(x - 3)^2} < \sqrt{100}$$

$$\Rightarrow \sqrt{10} < |x - 3| < 10$$

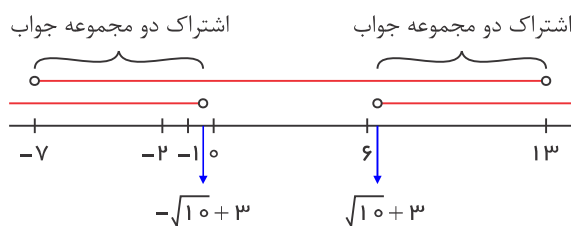
$$1) |x - 3| < 10$$

$$\Rightarrow -10 < x - 3 < 10$$

$$\Rightarrow -7 < x < 13$$

$$|x - 3| > \sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} x - 3 > \sqrt{10} \Rightarrow x > \sqrt{10} + 3 \\ x - 3 < -\sqrt{10} \Rightarrow x < -\sqrt{10} + 3 \end{cases}$$

حال به ازای مجموعه جواب به دست آمده از حاصل نامعادله ها، اشتراک دو مجموعه جواب به دست می آوریم.



$\sqrt{10} + 3$ و روی محور به صورت تقریبی نمایش داده شده اند.)

چون $x \in \mathbb{Z}$ ، پس مجموع اعداد صحیحی را که در مجموعه جواب هستند، به دست می آوریم.

$$-6 + (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 36$$

۱۰۰. مجموع تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه k عضوی و $k + 1$ عضوی ۴۸ می باشد. مجموعه k چند عضو دارد؟

(۴) ۳

(۳) ۴

(۲) ۵

(۱) ۶

پاسخ: گزینه ۳ نکته: تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی برابر است با: 2^n .

تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه k عضوی 2^k و تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه $k + 1$ عضوی 2^{k+1} است.

پس:

$$2^{k+1} + 2^k = 48$$

$$2^k \times 2 + 2^k = 48 \rightarrow 2^k(2 + 1) = 48$$

$$2^k = 16 \rightarrow 2^k = 2^4$$

$$k = 4$$

۱۰۱. دو تاس را هم‌زمان می‌اندازیم، چقدر احتمال دارد، مجموع اعداد رو شده برابر ۸ باشد؟

$$\frac{1}{9} \quad (4)$$

$$\frac{5}{36} \quad (3)$$

$$\frac{5}{12} \quad (2)$$

$$\frac{1}{6} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳ وقتی دو تاس را پرتاب می‌کنیم، کل حالت‌هایی که برای دو تاس اتفاق می‌افتد، برابر $n(S) = 6 \times 6 = 36$ است. حال باید تعداد حالت‌هایی را که مجموع دو تاس برابر ۸ می‌شود، به دست آوریم:

$$A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$$

تعداد حالت‌هایی که مجموع دو تاس ۸ است، برابر ۵ است، پس: $n(A) = 5$ در نتیجه:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

۱۰۲. باتوجه به مجموعه $A = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}, 5\}$ کدام گزینه درست است؟

$$4 \subseteq A \quad (4)$$

$$\{1\} \in A \quad (3)$$

$$\{2, 3\} \subseteq A \quad (2)$$

$$2 \in A \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳ تنها گزینه ۳ درست است. $\{1\} \in A$
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱ و ۴: چون عدد ۲ و ۴ به تنهایی عضو A نیستند، پس گزینه‌های ۱ و ۴ نادرست‌اند.

گزینه ۲: به دلیل اینکه ۲ و ۳ عضو A نیستند، پس A چنین زیرمجموعه‌ای ندارد.

۱۰۳. مجموعه $\{(2^{1387} + 2), (2^{1387} + 4), \dots, (2^{1388})\}$ چند عضو دارد؟

$$2^{649} \quad (4)$$

$$2^{1386} \quad (3)$$

$$2^{1388} \quad (2)$$

$$2^{1389} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{تعداد} = \frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{\text{فاصله}} + 1 = \frac{2^{1388} - (2^{1387} + 2)}{2} + 1$$

$$= \frac{2^{1388} - 2^{1387} - 2}{2} + 1 = \frac{2^{1388}}{2} - \frac{2^{1387}}{2} - \frac{2}{2} + 1$$

$$= 2^{1387} - 2^{1386} - 1 + 1 = 2^{1387} - 2^{1386} = 2^{1386} \times (2 - 1) = 2^{1386}$$

۱۰۴. چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی از اعداد طبیعی وجود دارد که حاصل ضرب اعضای آن در هم، برابر ۴۵ شود؟

$$\text{چهار} \quad (4)$$

$$\text{سه} \quad (3)$$

$$\text{دو} \quad (2)$$

$$\text{یک} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲ زیرمجموعه‌های سه عضوی که حاصل ضرب اعضای آنها در هم برابر ۴۵ می‌شود عبارتند از: $\{1, 15, 3\}$ و $\{5, 9, 1\}$ بقیه زیرمجموعه‌هایی مانند $\{3, 3, 5\}$ اعضای تکراری دارند و دو عضوی حساب می‌شوند.

۱۰۵. مجموعه‌ی مقابل چند زیرمجموعه دارد؟ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ (تهران - سرای دانش - دی ۹۴)

$$8 \quad (4)$$

$$16 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳ مجموعه‌ی A ، ۴ عضو دارد بنابراین $2^4 = 16$ زیرمجموعه دارد.

۱۰۶. اگر یک تاس را بیندازیم احتمال آن که ۵ بیاید $\frac{1}{6}$ است. اگر دو تاس را بیندازیم احتمال آن که مجموع دو عدد کمتر از ۵ باشد چه قدر است؟

$$\frac{1}{9} \quad (4)$$

$$\frac{2}{9} \quad (3)$$

$$\frac{1}{6} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

$\{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,2)\}$ = حالت‌هایی که مجموع دو عدد کمتر از ۵ باشد

بنابراین احتمال آن برابر خواهد بود با: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

۱۰۷. اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{4, 5, 6, 7\}$ باشد، آنگاه حاصل $(A - B) \cup (A \cap B)$ برابر است با:

- ۱) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ۲) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ۳) $\{4, 5, 6, 7\}$ ۴) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

پاسخ: گزینه ۲. باتوجه به این که $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ در نتیجه گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح این سوال است.

۱۰۸. در یک کلاس ۴۰ نفری، دانش‌آموزان حداقل یکی از زبان‌های فرانسه یا انگلیسی را می‌دانند. تعداد دانش‌آموزانی که زبان انگلیسی را می‌دانند ۲ برابر تعداد دانش‌آموزانی است که زبان فرانسه را می‌دانند و همچنین ۴ برابر تعداد دانش‌آموزانی است که هر دو زبان را می‌دانند. براین اساس تعداد دانش‌آموزانی که زبان انگلیسی را می‌دانند، چند نفر است؟

- ۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۰ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینه ۴. A را مجموعه دانش‌آموزانی که فرانسه می‌دانند و B را دانش‌آموزانی که انگلیسی می‌دانند در نظر می‌گیریم.

$$\left. \begin{aligned} n(B) = 2n(A) &\Rightarrow n(A) = \frac{n(B)}{2} \quad (1) \\ n(B) = 4n(A \cap B) &\Rightarrow n(A \cap B) = \frac{n(B)}{4} \quad (2) \\ n(A \cup B) &= 40 \quad (3) \end{aligned} \right\}$$

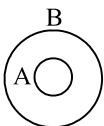
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \xrightarrow{1,2,3} 40 = \frac{n(B)}{2} + n(B) - \frac{n(B)}{4}$$

$$\Rightarrow 40 = \frac{2n(B) + 4n(B) - n(B)}{4} \Rightarrow 40 = \frac{5n(B)}{4} \Rightarrow n(B) = \frac{4 \times 40}{5} = 32$$

۱۰۹. اگر A و B دو مجموعه‌ی غیر تهی باشند و $A \subseteq B$ باشد، کدام رابطه درست است؟ (فارس - خرداد ۹۵)

- ۱) $A \cup B = \emptyset$ ۲) $A \cap B = \emptyset$ ۳) $A \cap B = A$ ۴) $A \cup B = A$

پاسخ: گزینه ۳ طبق نمودار ون داریم:



$$\begin{aligned} A \cup B &= B \\ A \cap B &= A \end{aligned}$$

۱۱۰. می‌خواهیم مثلث ABC را با اطلاعات $AB = 5$ و $AC = 10$ و $BC = x$ رسم کنیم. برای آنکه مثلث قابل رسم باشد x چند تا از مجموعه $\{2, 7, 9, 16\}$ می‌تواند باشد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲. همان طور که می‌دانیم در مثلث همواره جمع دو ضلع کوچکتر باید از ضلع سوم بیشتر باشد. پس:

مثلث تشکیل نمی‌شود $\times$ $BC = 2 \Rightarrow 5 + 2 < 10$

مثلث تشکیل می‌دهد $\checkmark$ $BC = 7 \Rightarrow 5 + 7 > 10$

مثلث تشکیل می‌دهد $\checkmark$ $BC = 9 \Rightarrow 5 + 9 > 10$

مثلث تشکیل نمی‌شود $\times$ $BC = 16 \Rightarrow 5 + 10 < 16$

پس ۲ عضو می‌تواند تشکیل مثلث بدهند.

۱۱۱. اختلاف تعداد اعضای دو مجموعه ۲ و اختلاف تعداد زیرمجموعه‌های دو مجموعه ۴۸ است. تعداد اعضای دو مجموعه برابر کدام گزینه است؟

- ۱) ۵ و ۴ ۲) ۶ و ۴ ۳) ۶ و ۲ ۴) ۲ و ۴

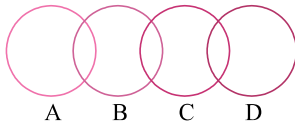
پاسخ: گزینه ۲. اگر مجموعه اول a عضو داشته باشد، مجموعه دوم $a + 2$ عضو دارد که

$$2^{a+2} - 2^a = 48$$

$$2^a(2^2 - 1) = 48 \rightarrow 2^a = 16 \rightarrow a = 4$$

مجموعه اول ۴ عضو و مجموعه دوم ۶ عضو خواهد داشت.

۱۱۲. اگر A, B, C و D چهار مجموعه مطابق شکل باشند، تعداد عضوهای مجموعه $A \cup B \cup C \cup D$ برابر است با:



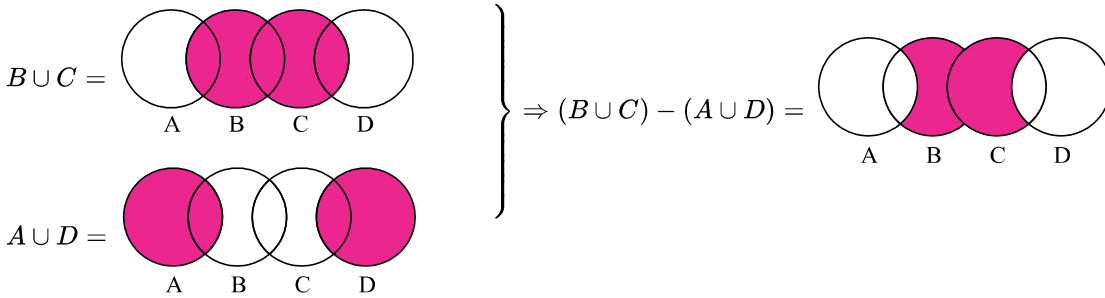
$$n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(B \cap C) \quad (1)$$

$$n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(C \cap D) \quad (2)$$

$$n(A) + n(D) + n(B \cup C) - n(A \cup D) \quad (3)$$

$$n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(B \cup C) \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳



بنابراین برای به دست آوردن $A \cup B \cup C \cup D$ ، کافی است دو مجموعه A و D را به مجموعه فوق اضافه کنیم.

۱۱۳. حاصل $(A \cup M')' \cup (A \cup \emptyset)'$ کدام گزینه است؟

$$\emptyset \quad (4) \quad A \quad (3) \quad M \quad (2) \quad A' \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$(A \cup M')' \cup (A \cup \emptyset)' = (A \cup \emptyset)' \cup (A \cup M)' = A' \cup M' = A' \cup \emptyset = A'$$

۱۱۴. اگر E مجموعه اعداد طبیعی زوج و O مجموعه اعداد طبیعی فرد باشد، بزرگترین عضو مجموعه A کدام است؟

$$A = \{(x-1)(y-1) | x \in E, y \in O, x+y \leq 20\}$$

$$81 \quad (4) \quad 80 \quad (3) \quad 72 \quad (2) \quad 70 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲ هر قدر x و y بزرگتر باشند حاصل $(x-1)(y-1)$ نیز بزرگتر است. پس حالتی را در نظر می‌گیریم که $x+y = 19$ (حالت $x+y = 20$ امکان‌پذیر نیست چون x زوج و y فرد است).

حال با امتحان کردن اعداد مشخص می‌شود که هر قدر اختلاف x و y کمتر باشد، حاصل ضرب مورد نظر بزرگتر است. بنابراین باید حالتی را در نظر بگیریم که $x = 10$ و $y = 9$ در این صورت $(10-1)(9-1) = 9 \times 8 = 72$ می‌شود.

۱۱۵. صورت دیگر مجموعه مقابل کدام گزینه است؟

$$A = \{3, 7, 11, 15, \dots, 39\}$$

$$A = \{4k-1 | k \in \mathbb{R}, k \leq 10\} \quad (2) \quad A = \{4k-1 | k \in \mathbb{W}, k \leq 10\} \quad (1)$$

$$A = \{\frac{4k-2}{2} | k \in \mathbb{N}, k \leq 10\} \quad (4) \quad A = \{\frac{4k-2}{2} | k \in \mathbb{Z}, k \leq 10\} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴ زیرا اگر در عبارت $\frac{4k-2}{2}$ اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰ را قرار دهیم مجموعه $A = \{3, 7, 11, 15, \dots, 39\}$ حاصل می‌شود.

۱۱۶. مقلوب هر عدد با جابه‌جایی ارقام به دست می‌آید؛ مثلاً مقلوب عدد ۵۳۱ برابر با ۱۳۵ است و مقلوب عدد ۵۹ عدد ۹۵، در این صورت چند عدد ۵ رقمی وجود دارد که مقلوبش برابر باشد؟

$$450 \quad (4) \quad 800 \quad (3) \quad 850 \quad (2) \quad 900 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱ رقم چهارم باید همان رقمی باشد که در جایگاه دوم نوشته‌ایم؛ پس ۱ حالت بیش‌تر نیست. رقم پنجم هم باید با رقم اول مساوی باشد!

$$9 \times 10 \times 10 \times 1 \times 1 = 900$$

۱۱۷. مجموعه B مجموعه‌ای است که شامل اعداد کم‌تر از ۱۰۰۰ که اگر هر دو عضو آن را جمع بزنیم، حاصل جمع در B نیست؛ B حداکثر چند عضو دارد؟

- (۱) ۳۰۰ (۲) ۴۰۰ (۳) ۴۵۰ (۴) ۵۰۰

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا اعضای ۵۰۰ تا ۹۹۹ را نگه می‌داریم. کوچک‌ترین دو عضو ۵۰۰ و ۵۰۱ هستند که جمع آن‌ها در مجموعه نیست؛ پس مجموعه ۵۰۰ عضوی است:

$$۹۹۹ - ۵۰۰ + ۱ = ۵۰۰$$

۱۱۸. کدام گزینه نسبت به ضرب بسته است؟

- (۱) $\{6k + 2 | k \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $\{5k - 1 | k \in \mathbb{Z}\}$ (۳) $\{4k + 5 | k \in \mathbb{Z}\}$ (۴) $\{3k + 2 | k \in \mathbb{Z}\}$

پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم:

$$4k + 5 = 4k + 4 + 1 = 4k' + 1$$

پس:

$$\{4k + 5 | k \in \mathbb{Z}\} = \{4k' + 1 | k \in \mathbb{Z}\}$$

حالا اگر دو عدد بر ۴ باقی‌مانده ۱ داشته باشند، ضرب آن‌ها نیز بر ۴ باقی‌مانده ۱ می‌آورد.

$$(4k + 1)(4k' + 1) = (16kk' + 4k + 4k' + 1) = 4(4kk' + k + k') + 1 = 4F + 1$$

بر ۴ باقی‌مانده ۱ می‌آورد.

۱۱۹. اگر $\{7, 5, 3, y\} \cap \{8, 5, x, 2, 10\} = \{5, 7, 2\}$ باشد، آن‌گاه $x + y$ چند است؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۱ اگر دو مجموعه را A و B بنامیم:

$$2 \in A \cap B \Rightarrow 2 \in A \Rightarrow y = 2$$

$$7 \in A \cap B \Rightarrow 7 \in B \Rightarrow x = 7$$

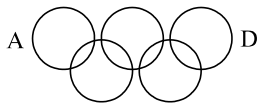
$$x + y = 2 + 7 = 9$$

۱۲۰. تعداد اعضای کدام مجموعه با بقیه متفاوت است؟

- (۱) $\{\emptyset, \{\}\}$ (۲) $\{\{\}, \{\{\}\}\}$ (۳) $\{\{\emptyset\}\}$ (۴) $\{\{\}\}$

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم $\emptyset = \{\}$ و هر دو نماینده مجموعه تهی هستند؛ پس در گزینه (۱) و (۳) و (۴) مجموعه‌ها تک‌عضوی‌اند و مجموعه گزینه (۲) دو عضوی است.

۱۲۱. شکل روبه‌رو نمودار ون تعدادی از زیرمجموعه‌های متفاوت $\{1, 2, 3\}$ را نشان می‌دهد کدام گزینه در مورد $A \cup D$ درست است؟



(۲) حتماً یک عضوی است.

(۱) می‌تواند دو عضوی باشد.

(۴) این مجموعه نمی‌تواند پنج عضوی باشد.

(۳) می‌تواند سه عضوی باشد.

پاسخ: گزینه ۲ مجموعه فوق در نهایت ۸ زیرمجموعه دارد. هر کدام از مجموعه‌های نشان داده شده در نمودار حداقل با یک زیرمجموعه دیگر اشتراک دارد بنابراین هیچ‌کدام تهی نیستند. هیچ‌کدام از مجموعه‌ها نیز با مجموعه مرجع برابر نیست. زیرا در این صورت باید زیرمجموعه‌های دیگر داخل آن قرار می‌گرفتند. بنابراین امکان ندارد که این دو مجموعه متفاوت باشند.

۱۲۲. یازده زیرمجموعه غیر مساوی از $M = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که از هر دو تای آن‌ها، یکی زیرمجموعه دیگری باشد.

اگر A و B و C به ترتیب مجموعه‌های ۷، ۵ و ۳ عضوی این ۱۱ مجموعه باشند در مورد $A \cup (B - C)$ چه می‌توان گفت؟

- (۱) ۱۱ عضوی است. (۲) ۹ عضوی است. (۳) ۷ عضوی است. (۴) ۵ عضوی است.

پاسخ: گزینه ۳ مجموعه ۳ عضوی زیرمجموعه مجموعه ۵ عضوی و مجموعه ۵ عضوی زیرمجموعه مجموعه ۷ عضوی است. بنابراین اجتماع حاصل ۷ عضوی خواهد بود.

۱۲۳. در چه صورت جواب عبارت مقابل B است؟

$$(A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \subseteq B \subseteq C \quad [۴]$$

$$C \subseteq B \quad [۳]$$

$$C \subseteq A, B \subseteq A \quad [۲]$$

$$B \subseteq C \quad [۱]$$

پاسخ: گزینه ۴ اگر $A \subseteq B$ باشد عبارت $A \cup B = B$ است و همین طور اگر $A \subseteq C$ باشد مقدار $(A \cup C) = C$ می شود و اگر $B \subseteq C$ باشد، آن گاه $B \cap C = B$ می شود.

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = B \rightarrow A \cup (B \cap C) = B$$

با ساده کردن عبارت می توان استدلال کرد که چه شرایطی باید برقرار باشد.

۱۲۴. اگر B یک مجموعه باشد و $A = B \cup \{b\}$ باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

$$[۲] \text{ تعداد عضوهای } A \text{ از } B \text{ بیشتر است.}$$

$$[۱] \text{ در مجموعه } A \text{ عضوی وجود دارد که در } B \text{ وجود ندارد.}$$

$$[۴] \text{ هر زیرمجموعه } B \text{ زیرمجموعه } A \text{ نیز هست.}$$

$$[۳] \text{ تعداد زیرمجموعه های } A \text{ دو برابر تعداد زیرمجموعه های } B \text{ است.}$$

پاسخ: گزینه ۴ اگر فرض کنید مجموعه B دارای عضو b باشد به این ترتیب اجتماع آن با مجموعه $\{b\}$ همان B می شود به این ترتیب گزینه های ۱، ۲ و ۳ همواره درست نیست. اما گزینه «۴» همواره صحیح است.

۱۲۵. کدام یک از مجموعه های زیر درست نامگذاری نشده اند؟

$$[۲] \mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ اعداد حسابی}$$

$$[۱] \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \text{ اعداد طبیعی}$$

$$[۴] \mathbb{R} = (\mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q})' \text{ اعداد حقیقی}$$

$$[۳] \mathbb{Z} = \{\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \text{ اعداد گویا}$$

پاسخ: گزینه ۳ در گزینه «۳» $\mathbb{Z}$ نشان دهنده مجموعه اعداد صحیح است. مجموعه اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نشان می دهیم و به صورت $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ تعریف می شود.

۱۲۶. کدام گروه ها از نظر علم ریاضیات مجموعه به حساب می آید؟

$$[۴] \text{ گروه کارمندان وظیفه شناس بانک}$$

$$[۳] \text{ گروه بهترین شاعران ایران}$$

$$[۲] \text{ گروه اعداد اول زوج}$$

$$[۱] \text{ گروه سه عدد زوج}$$

پاسخ: گزینه ۲ توجه: در تعریف مجموعه باید دقت کنید که اعضای مجموعه باید مشخص باشند.

طبق تعریف مجموعه گزینه های «۱»، «۳» و «۴» اعضای آن کاملاً مشخص نیستند اما گزینه «۲» تنها عضو عدد ۲ است.

۱۲۷. اگر C, B, A سه مجموعه باشند و $C \subseteq B \subseteq A$ ، مجموعه زیر با کدام گزینه برابر است؟ $(B \cup A) \cap (A \cup C)$

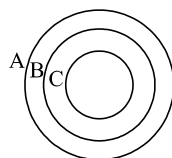
$$B \cup C \quad [۴]$$

$$B \cup A \quad [۳]$$

$$B \quad [۲]$$

$$A \quad [۱]$$

پاسخ: گزینه ۱ چون سه مجموعه A, B, C به صورت $C \subseteq B \subseteq A$ است، پس نمودار آن به صورت زیر است:



$$B \cup A = A$$

$$A \cup C = A$$

$$\rightarrow A \cap A = A$$

۱۲۸. در یک آزمایش تصادفی، فضای نمونه ای به صورت $s = \{2, 4, 6, 8\}$ است. چند پیشامد در این آزمایش دارای احتمال وقوع $\frac{3}{4}$ است؟

$$۸ \quad [۴]$$

$$۶ \quad [۳]$$

$$۴ \quad [۲]$$

$$۳ \quad [۱]$$

پاسخ: گزینه ۲ در این آزمایش مقدار $n(S) = 4$ و پیشامدهایی که احتمال وقوع آنها $\frac{3}{4}$ است، در واقع زیرمجموعه های ۳ عضوی از مجموعه ۴ عضوی (S) است. تعداد زیرمجموعه های سه عضوی این مجموعه را می نویسیم.

$$\{2, 4, 6\}, \{2, 4, 8\}, \{4, 6, 8\}, \{2, 6, 8\}$$

پس تعداد این پیشامدها برابر ۴ است.

۱۲۹. دو مجموعه $\{-1\}$ و $\{m - n, n^3\}$ برابرند. حاصل mn کدام است؟

$$-۲ \quad [۴]$$

$$۲ \quad [۳]$$

$$۱ \quad [۲]$$

$$-۱ \quad [۱]$$

پاسخ: گزینه ۳ دو مجموعه زمانی با هم برابرند که عضوهایشان دقیقاً برابر هم باشند، پس حاصل n^3 و $m - n$ هر دو باید برابر -1 باشند.

$$n^3 = -1 \Rightarrow n = -1$$

$$m - n = -1 \xrightarrow{n=-1} m - (-1) = -1$$

$$\Rightarrow m + 1 = -1 \Rightarrow m = -2$$

$$\Rightarrow mn = (-2)(-1) = 2$$

۱۳۰. اگر a, b, c سه عدد حقیقی باشند، $\{(a+1)^2 + 1, (b-1)^3\} = \{-1, -a^4, c\}$ ، آنگاه دربارهٔ دو ادعای زیر چه می‌توان گفت:

ادعای اول: حاصل c^a می‌تواند برابر ۱ باشد.

ادعای دوم: حاصل c^a می‌تواند برابر ۵ باشد.

۱) هر دو ادعا درست است. ۲) فقط ادعای اول درست است. ۳) فقط ادعای دوم درست است. ۴) هر دو ادعا نادرست است.

پاسخ: گزینه ۳ $(a+1)^2 + 1$ همواره عددی مثبت است، پس مقدار C باید مثبت باشد، بنابراین C^a نمی‌توان برابر -1 باشد، پس ادعای اول نادرست است. C^a به ازای $a = 1$ و $c = 5$ برابر ۵ می‌شود و این مقادیر برای a و c امکان‌پذیر هستند، چون باید $C = (a+1)^2 + 1$ باشد که این تساوی به ازای مقادیر بالا درست است $(5 = (1+1)^2 + 1)$ پس ادعای دوم صحیح است.

۱۳۱. باتوجه به مجموعهٔ $A = \{\sqrt{n} | n \in \mathbb{N}\}$ ، کدام رابطه درست است؟

۱) $0 \in A$ ۲) $A \subseteq \mathbb{Q}$ ۳) $A - \mathbb{Q} = \emptyset$ ۴) $\mathbb{N} \subseteq A$

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا اعضای مجموعهٔ A را مشخص می‌کنیم.

$$A = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \dots\}$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: باتوجه به مجموعهٔ بالا، صفر عضو آن نیست.

گزینه ۲: $A \subseteq \mathbb{Q}'$ نیست، چون اعضای گویا نیز در مجموعهٔ A وجود دارد.

گزینه ۳: چون A زیرمجموعهٔ اعداد گویا ($\mathbb{Q}$) نیست، پس $A - \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

گزینه ۴: پاسخ درست است: $N \subseteq A$.

۱۳۲. مجموعهٔ $A = \{2^{3x+y} | x, y \in \mathbb{Z}, -4 \leq 2x \leq 2, xy = 12\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینه ۲

$$-4 \leq 2x \leq 2 \xrightarrow{\div 2} -2 \leq x \leq 1$$

$$\left. \begin{matrix} -2 \leq x \leq 1 \\ xy = 12 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (x, y) = \{(1, 12), (-1, -12), (-2, -6)\}$$

$$2^{3x+y} \Rightarrow (x=1, y=12) \Rightarrow 2^{15}$$

$$2^{3x+y} \Rightarrow (x=-1, y=-12) \Rightarrow 2^{-15}$$

$$2^{3x+y} \Rightarrow (x=-2, y=-6) \Rightarrow 2^{-12}$$

$$\Rightarrow A = \{2^{-15}, 2^{-12}, 2^{15}\} \Rightarrow n(A) = 3$$

پس تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای A برابر $2^3 = 8$ می‌باشد.

۱۳۳. اگر $A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ و $B = \{x | x = 4n - 1, n \in A\}$ ، آنگاه $B \subseteq A$ چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۲۹ ۳) ۷ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا اعضای مجموعهٔ B را می‌نویسیم:

$$B = \{x | x = 4n - 1, n \in A\} = \{3, 7, 11, 15, \dots, 119\}$$

و سپس باتوجه به این که $B \subseteq A$ است یعنی اعضای B را که کم تر از ۳۰ باشند را انتخاب می کنیم

$$B = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27\}$$

پس تعداد اعضای مجموعه B برابر ۷ است. $n(B) = 7$

۱۳۴. فرض کنید k یک عدد ثابت است و $A = \{x^2 + k | x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < k\}$ اگر بدانیم $\{6, 9\} \subseteq A$ آنگاه k عضو کدام مجموعه است؟

$\{5x + 1 | x \in \mathbb{Z}\}$ (۱)
 $\{4x + 3 | x \in \mathbb{Z}\}$ (۲)
 $\{2x + 6 | x \in \mathbb{Z}\}$ (۳)
 $\{3x - 4 | x \in \mathbb{Z}\}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴ باتوجه به راهبرد حدس و آزمایش و بررسی k های مختلف $k = 5$ می شود. بنابراین $-3 \leq x < 5$ و در نتیجه اعضای A عبارتند از:

$$A = \{x^2 + 5 | x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < 5\} = \{(-3)^2 + 5, (-2)^2 + 5, (-1)^2 + 5, 0^2 + 5, \dots, 4^2 + 5\}$$

$$= \{14, 9, 6, 5, \dots, 21\}$$

همان طور که مشاهده می شود ۶ و ۹ اعضای A هستند بنابراین $\{6, 9\} \subseteq A$ است. حال باتوجه به گزینه ها در گزینه ۴، عدد ۵ ساخته می شود پس k عضو $\{3x - 4 | x \in \mathbb{Z}\}$ است.

۱۳۵. مجموعه $\left\{ \frac{a}{b} \mid \frac{a}{b} < 1, b < 13, a, b \in \mathbb{N} \right\}$ چند عضو دارد؟

49 عضو (۱)
 45 عضو (۲)
 78 عضو (۳)
 55 عضو (۴)

پاسخ: گزینه ۲ حالت های ممکن را برای a و b در نظر می گیریم $1 \leq b \leq 12, b < 13, b \in \mathbb{N} \Rightarrow$

صفر حالت $\Rightarrow b = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < 1$

یک حالت $a = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow b = 2$

دو حالت $a = 1, 2 \Rightarrow \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow b = 3$

$\vdots$

۱۱ حالت $a = 1, 2, 3, 4, \dots, 11 \Rightarrow \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow b = 12$

$\Rightarrow$ تعداد کل حالت ها $= 1 + 2 + \dots + 11 = 66$

اما در میان این کسرها نوشته شده، برخی از کسرها با هم مساوی هستند آن ها را به دست می آوریم:

۵ تا تکراری $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}$

۳ تا تکراری $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$

۲ تا تکراری $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$

۱ تکراری $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$

۱ تکراری $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$

۱ تکراری $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

۱ تکراری $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$

۳ تکراری $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$

۱ تکراری $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$

۲ تکراری $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$

۱ تکراری $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$

مجموعاً $5 + 3 + 2 + 1 + 1 + 3 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 21$

$66 - 21 = 45$

۱۳۶. بزرگ ترین عضو $A = \{-(x-1)^2 + 1 | x \in \mathbb{N}\}$ کدام است؟

1 (۱)
 صفر (۲)
 ۶۳ (۳)
 نامشخص (۴)

پاسخ: گزینه ۱

می دانیم $(x-1)^2$ مثبت است و $-(x-1)^2 \leq 0$ و چون توان ۲ نمی تواند منفی باشد پس باید صفر باشد یعنی:

$$(x-1)^2 = 0 \rightarrow x-1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$x = 1 \rightarrow -(x+1)^2 + 1 = 1$$

۱۳۷. باتوجه به مجموعه‌ی $A = \left\{ x \mid -\frac{6}{5} < x \leq \sqrt{5} \right\}$ کدام درست است؟

$$-\frac{6}{5} \in A \quad (4)$$

$$-1,21 \in A \quad (3)$$

$$5 \in A \quad (2)$$

$$2,005 \in A \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

$$-1,2 = -\frac{6}{5} < x < \sqrt{5} = 2,2$$

$$-1,2 < 2,005 < \sqrt{5} \simeq 2,2$$

۱۳۸. در مجموعه‌ی $A = \{x \mid x \in N, 10 < x < 50\}$ چند عدد اول وجود دارد که مجموع ارقام آنها عددی اول است؟

$$6 \quad (4)$$

$$9 \quad (3)$$

$$10 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\begin{array}{l} \underbrace{11}_{1+1=2}, \underbrace{23}_{2+3=5}, \underbrace{29}_{2+9=11}, \underbrace{41}_{4+1=5}, \underbrace{43}_{4+3=7}, \underbrace{47}_{4+7=11} \end{array}$$

۱۳۹. تعداد زیرمجموعه‌های $B = \{\{3\}, 4\}$ چند برابر زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{\{1, 2, 3, \dots, 10\}\}$ می‌باشد؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{aligned} n(B) = 2 \quad \text{زیرمجموعه‌ها} &= 2^2 = 4 \Rightarrow \frac{4}{2} = 2 \\ n(A) = 1 \quad \text{زیرمجموعه‌ها} &= 2^1 = 2 \end{aligned}$$

۱۴۰. دوتاس را با هم می‌ریزیم، مطلوب است احتمال آن که مجموع دوتاس ۷ یا هر دو زوج بیاید؟

$$\frac{21}{36} \quad (4)$$

$$\frac{11}{36} \quad (3)$$

$$\frac{4}{36} \quad (2)$$

$$\frac{15}{36} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

کل حالت‌های دو تاس در جدول مقابل است که $n(S) = 36$ حالت‌هایی که مجموع ۷ یا هر دو زوج باشد را در جدول رنگی می‌کنیم که $n(A) = 15$

(۱, ۱)	(۱, ۲)	(۱, ۳)	(۱, ۴)	(۱, ۵)	(۱, ۶)
(۲, ۱)	(۲, ۲)	(۲, ۳)	(۲, ۴)	(۲, ۵)	(۲, ۶)
(۳, ۱)	(۳, ۲)	(۳, ۳)	(۳, ۴)	(۳, ۵)	(۳, ۶)
(۴, ۱)	(۴, ۲)	(۴, ۳)	(۴, ۴)	(۴, ۵)	(۴, ۶)
(۵, ۱)	(۵, ۲)	(۵, ۳)	(۵, ۴)	(۵, ۵)	(۵, ۶)
(۶, ۱)	(۶, ۲)	(۶, ۳)	(۶, ۴)	(۶, ۵)	(۶, ۶)

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{n(A)}{n(S)} \\ &= \frac{15}{36} \end{aligned}$$

۱۴۱. یک تاس شش وجهی را طوری ساخته‌اند که احتمال ظاهر شدن عدد ۲ در آن $\frac{1}{5}$ است. احتمال ظاهر شدن عددی زوج در یک بار پرتاب این تاس

چقدر است؟ (اعداد غیر از ۲ هم‌شانس هستند)

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{13}{25} \quad (3)$$

$$\frac{12}{25} \quad (2)$$

$$\frac{3}{5} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۳ احتمال آمدن عدد ۲ برابر $\frac{1}{5}$ است پس احتمال اینکه عددی غیر از ۲ بیاید برابر $\frac{4}{5}$ است $\left(1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}\right)$. احتمال اعداد به غیر از ۲ (۱ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶) برابر $\frac{4}{5}$ شده است و چون احتمال این اعداد هم شانس است پس:

$$\frac{4}{5} \div 5 = \frac{4}{25}$$

احتمال زوج آمدن عدد تاس

$$2 \text{ احتمال عدد } 2 + 4 \text{ احتمال عدد } 4 + 6 \text{ احتمال عدد } 6 = \frac{1}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25}$$

۱۴۲. عضوهای مجموعه $A = \{x \in N | x \leq 8\}$ را روی کارت‌هایی نوشته و یک کارت را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم، احتمال اینکه شماره این کارت مضرب ۴ باشد، چقدر است؟

$$\frac{3}{8} \quad (1) \quad \frac{1}{4} \quad (2) \quad \frac{1}{8} \quad (3) \quad \frac{2}{7} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$A = \{x \in N | x \leq 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

اعضای مجموعه A برابر تمام حالت‌های ممکن است و حالت‌های مطلوب مضرب ۴ بودن این اعداد است پس: $B = \{4, 8\}$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(A)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۱۴۳. ارقام صفحات کتابی ۳۲۰ صفحه‌ای را به صورت تک رقمی روی کارت‌هایی نوشته و درون کیسه‌ای ریخته‌ایم. یک رقم بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه رقم ۱ بیرون بیاید کدام است؟

$$\frac{1}{10} \quad (1) \quad \frac{11}{100} \quad (2) \quad \frac{43}{213} \quad (3) \quad \frac{43}{240} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۱ در بین اعداد ۱ تا ۳۲۰، رقم‌هایی که استفاده می‌شوند، در مجموعه‌ی زیر نشان داده شده است:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\text{احتمال آنکه رقم یک بیرون بیاید} = \frac{1}{10}$$

۱۴۴. یاقوت‌ها به چهار رنگ مختلف وجود دارند. ۱۲ عدد آن‌ها به رنگ زرد، ۸ عدد آن‌ها به رنگ آبی، ۶ عدد آن‌ها به رنگ سبز و ۲۰ عدد آن‌ها قرمز است. چند یاقوت برداریم تا مطمئن باشیم که از یک رنگ ۱۰ تا برداشته‌ایم؟ (المپیادهای ریاضی بلژیک، فرانسه و هلند - ۲۰۰۱)

$$34 \quad (1) \quad 32 \quad (2) \quad 33 \quad (3) \quad 24 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۳

$$6 + 8 + 9 + 9 + 1 = 33$$

۱۴۵. در پرتاب ۲ تاس سالم چقدر احتمال دارد مجموع دو عدد رو شده برابر ۴ باشد؟

$$\frac{2}{36} \quad (1) \quad \frac{4}{36} \quad (2) \quad \frac{1}{36} \quad (3) \quad \frac{3}{36} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۴ تعداد کل حالتها در پرتاب ۲ تاس برابر $6 \times 6 = 36$ است. $(n(S) = 36)$

$$A = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$$

$$n(A) = 3$$

بنابراین

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36}$$

احتمال اینکه مجموع دو عدد ۴ باشد.

۱۴۶. از بین اعداد ۱ تا ۹۹ یک عدد را تصادفی انتخاب می‌کنیم، احتمال آن که دقیقاً یک رقم ۳ داشته باشیم کدام است؟

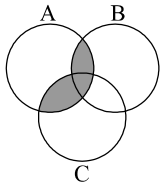
$$\frac{3}{11} \quad (1) \quad \frac{2}{11} \quad (2) \quad \frac{1}{11} \quad (3) \quad \frac{2}{9} \quad (4)$$

پاسخ: گزینه ۲

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\text{فقط رقم ۳}} \times \frac{9}{\text{ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹}} &= 1 \times 9 = 9 \\ \frac{9}{\text{ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹}} \times \frac{1}{\text{فقط رقم ۳}} &= 1 \times 9 = 9 \end{aligned} \right\} \rightarrow 18 = 9 + 9 = 9 \text{ کل حالات}$$

احتمال آن که دقیقاً یک رقم ۳ داشته باشیم برابر است با:

$$\frac{18}{99} = \frac{2}{11}$$



۱۴۷. در شکل زیر، قسمت هاشورخورده با کدام مجموعه برابر است؟

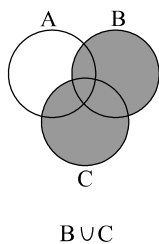
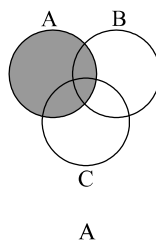
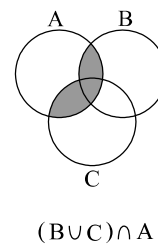
$(A \cup B) \cap C$ [۲]

$(B \cup C) - A$ [۱]

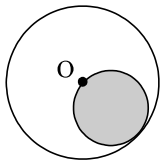
$(A \cup C) \cap B$ [۴]

$(B \cup C) \cap A$ [۳]

پاسخ: گزینه ۳ باتوجه به نمودار و ن مجموعه‌ها داریم:



۱۴۸. در شکل مقابل دایره به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر مشخص شده است یک نقطه P به طور تصادفی درون دایره انتخاب می‌شود چه قدر احتمال دارد که نقطه P درون دایره سایه زده شده باشد؟



$\frac{1}{5}$ [۴]

$\frac{1}{4}$ [۳]

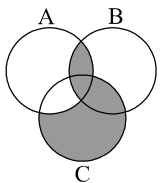
$\frac{1}{3}$ [۲]

$\frac{1}{2}$ [۱]

پاسخ: گزینه ۳ در این سوال فضای نمونه مساحت دایره بزرگ است و پیشامد دلخواه ما قرار گرفتن نقطه در مساحت دایره هاشور خورده

$n(S) = 5 \times 5 \times 3,14$, $n(A) = 2,5 \times 2,5 \times 3,14$

$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2,5 \times 2,5 \times 3,14}{5 \times 5 \times 3,14} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$



$(A \cap B) \cup (C - A)$ [۲]

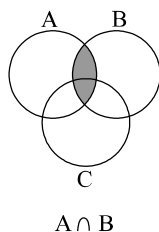
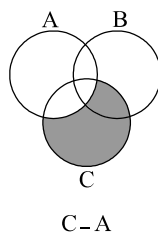
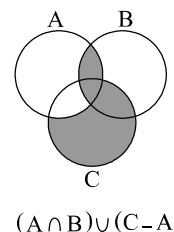
$C - (A \cap C)$ [۱]

$(C \cup B) - (A \cap B)$ [۴]

$B \cap (A \cup C)$ [۳]

۱۴۹. کدام گزینه قسمت رنگ شده را نشان می‌دهد؟

پاسخ: گزینه ۲ باتوجه به نمودار و ن داریم:



۱۵۰. اگر مجموعه A یک مجموعه ۵ عضوی و B سه عضوی باشد و $A \cap B$ دارای ۲ عضو باشد، در این صورت تعداد اعضای مجموعه $(B - A) \cup (A - B)$ برابر است با:

۰ [۴]

۶ [۳]

۴ [۲]

۱۰ [۱]

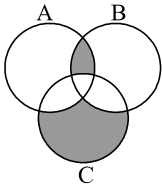
پاسخ: گزینه ۲

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 5 - 2 = 3$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 3 - 2 = 1$$

$$\Rightarrow n[(B - A) \cup (A - B)] = 1 + 3 = 4$$

۱۵۱. مجموعه‌های $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 29\}$ و $B = \{x + 12 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 21\}$ و $C = \{15, 16, 17, \dots, 35\}$ را در نظر بگیرید. باتوجه به شکل، ناحیه‌های سایه خورده کلاً چند عضو دارد؟



۲ ☐

۴ ☐

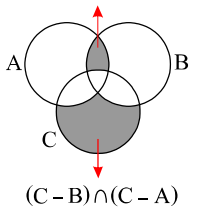
۷ ☐

۵ ☐

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا مجموعه‌ی B را با اعضایش مشخص می‌کنیم:

$$B = \{x + 12 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 21\} = \{13, 14, 15, \dots, 33\}$$

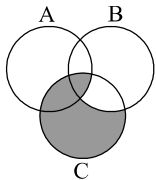
$$(A \cap B) - (A \cap B \cap C)$$



$$\Rightarrow (A \cap B) - (A \cap B \cap C) = \{13, 14, 15, \dots, 29\} - \{15, 16, \dots, 29\} = \{13, 14\}$$

$$\Rightarrow (C - B) \cap (C - A) = \{34, 35\} \cap \{30, 31, 32, 33, 34, 35\} = \{34, 35\}$$

$$\Rightarrow \text{چهار عضو دارد} \Rightarrow \text{اجتماع دو قسمت} = \{13, 14, 34, 35\}$$



۱۵۲. کدام گزینه بیان‌گر قسمت‌های هاشورخورده در شکل مقابل است؟

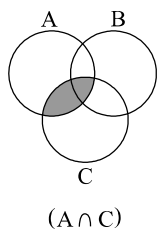
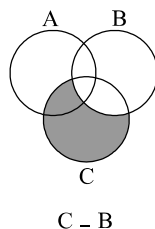
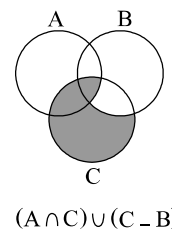
$$(A \cap C) \cup (C - B) \quad \text{۲} \quad \text{۴}$$

$$(A \cap C) \cup (B - C) \quad \text{۴}$$

$$(C - B) \cap (A \cap B \cap C) \quad \text{۱}$$

$$(B - C) \cup (A \cap B \cap C) \quad \text{۳}$$

پاسخ: گزینه ۲ با استفاده از نمودار ون داریم:



۱۵۳. چند عدد ۸ رقمی مانند $\overline{a_1 a_2 \dots a_8}$ وجود دارند که $a_1 = 1$ و $a_2, \dots, a_8 \in \{0, 1\}$ و رابطه

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8$$

هم برقرار است؟

۳۲ ☐

۴۹ ☐

۳۵ ☐

۲۷ ☐

پاسخ: گزینه ۲ تعداد صفرها و یک‌های دو طرف باید مساوی باشند پس تعداد یک‌ها را می‌نویسیم:

$$\binom{3}{0} \binom{4}{1} + \binom{3}{1} \binom{4}{2} + \binom{3}{2} \binom{4}{3} + \binom{3}{3} \binom{4}{4} = 1 \times 4 + 3 \times 6 + 3 \times 4 + 1 \times 1 = 35$$

۱۵۴. اگر A مجموعه اعدادی که بر ۳ و B مجموعه اعدادی که بر ۵ بخش پذیر باشند و $x \in (A' \cup B)'$ کدام حکم درست است؟

- (۱) x بر ۳ و ۵ بخش پذیر است.
(۲) x بر ۵ بخش پذیر بر ۳ بخش پذیر نیست.
(۳) x نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر است.
(۴) x بر ۳ بخش پذیر و بر ۵ بخش پذیر نیست.

پاسخ: گزینه ۴

$$A = \{3, 6, 9, 0\}, B = \{5, 10, 15, 0\}$$

$$x \in (A' \cup B)' = (A')' \cap B' = A \cap B' = A - B$$

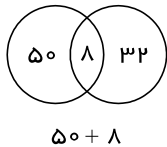
x عضو A بوده و x عضو B نمی باشد.

۱۵۵. در یک کلوب ورزشی ۳۲ نفر فوتبال بازی نمی کنند و ۵۰ نفر هم والیبال بازی نمی کنند و ۴۰ نفر والیبال بازی می کنند. چند نفر فوتبال بازی می کنند؟

- (۱) ۸ (۲) ۳۲ (۳) ۴۰ (۴) ۵۸

پاسخ: گزینه ۴ باید به این نکته توجه داشته باشیم که شخصی که در کلوب ورزشی عضو است ورزش می کند. در این سوال چون فقط در مورد والیبال صحبت شده است، اگر شخصی فوتبال بازی نکند، فقط والیبال بازی می کند.

پس در این کلوب ورزشی ۳۲ نفر فقط والیبال بازی می کنند و چون گفته شده است ۴۰ نفر والیبال بازی می کنند پس $40 - 32 = 8$ نفر مشترک فوتبال و والیبال بازی می کنند. پس:



$$50 + 8$$

۱۵۶. فرض کنید a, b, c, d مقدارهای متمایزی از مجموعه های $\{0, 1, 2, 3\}$ باشد در این صورت بیشترین مقدار عبارت $c \times a^b - d$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۳ به طور واقع برای اینکه این عبارت بیشترین مقدار را داشته باشد برای d باید کمترین مقدار را می بایستی در نظر بگیریم. حال برای a^b داریم:

$$a^b = 8 \Leftarrow b = 3, a = 2$$

$$a^b = 9 \Leftarrow b = 2, a = 3$$

پس مناسب تر است $d = 0, a = 3, b = 2$ چون مقادیر متمایز هستند برای C مقدار ۱ را انتخاب می کنیم پس با شرایطی که انتخاب کردیم:

$$c \times a^b - d = 1 \times 3^2 - 0 = 9$$

۱۵۷. اگر $A = \{x \in Z | \sqrt{x} \leq 4, \sqrt{x} \in N\}$ و $B = \{2x | x \in Z\}$ آنگاه $A \cap B$ چند عضو دارد؟ (روبوکاپ - ۱۳۸۶)

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

پاسخ: گزینه ۳ مجموعه A ، $\sqrt{x} \in N$ است پس برابر مربعات کامل است و چون $\sqrt{x} \leq 4$ پس اعضای A از ۱۶ کوچک تر هستند و مربعات کامل کوچک تر یا عادی عدد ۱۶ برابر است با $\{1, 4, 9, 16\}$ مجموعه B هم برابر مضارب ۲ مثبت و منفی است

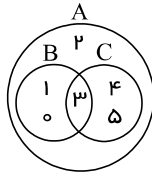
$$B = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

پس اشتراک دو مجموعه برابر است با $\{4, 16\}$

۱۵۸. اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{c, e, b\}$ باشد، آنگاه $B - A$ کدام است؟ (لرستان خرداد - ۹۵)

- (۱) $\{c, e, b\}$ (۲) $\{e\}$ (۳) $\{a, d\}$ (۴) $\{c, b\}$

پاسخ: گزینه ۲ طبق تعریف داریم: $B - A = \{x | x \in B, x \notin A\}$ یا به عبارتی باید از B ، عضوهای مشترک A و B را برداریم. c, b عضوهای مشترک دو مجموعه A و B هستند.



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۵۹. باتوجه به نمودار، چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

(الف) $2 \in (A \cap B)$

(ب) $(B \cup C) \subseteq A$

(ج) $1 \notin (A \cap C)$

(د) $0 \in (A \cup B)$

(هـ) $(A \cap C) = A$

(و) $(A \cap B) = B$

پاسخ: گزینه ۴ موارد (ب)، (ج)، (د) و (و) صحیح می باشند.

۱۶۰. اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} | -8 \leq x < 5\}$ و $B = \{x \in A | x \notin A\}$ کدام یک از مجموعه های زیر با مجموعه B مساوی هست؟

(۱) $\{x - 1 | x \in A, -7 \leq x < -3\}$

(۲) $\{x \in \mathbb{Z} | -8 \leq x \leq -4\}$

(۳) $\{x + 1 | x \in A, -9 \leq x \leq -6\}$

(۴) گزینه های الف و ج

پاسخ: گزینه ۴ بررسی گزینه ها:

$$A = \{-8, -7, -6, \dots, 2, 3, 4\} \Rightarrow B = \{-8, -7, -6, -5\}$$

گزینه ۱:

$$\{-8, -7, -6, -5\} = \{-7-1, -6-1, -5-1, -4-1\}$$

گزینه ۲:

$$\{-8, -7, -6, -5, -4\}$$

گزینه ۳:

$$\{-8, -7, -6, -5\} = \{-9+1, -8+1, -7+1, -6+1\}$$

پس پاسخ گزینه ۴ می باشد.

۱۶۱. اگر A و B دو مجموعه و M مجموعه مرجع باشد، $(A' \cap B) \cup (A \cap B)$ کدام است؟

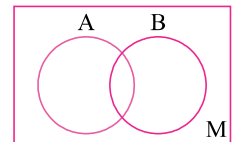
(۱) B

(۲) A

(۳) Φ

(۴) M

پاسخ: گزینه ۱



۱۶۲. اگر مجموعه C به صورت $\{x + 2 | x \in P, 4 \leq x - 1 < 30\}$ تعریف شده باشد که در آن منظور از P مجموعه اعداد اول باشد، کدام عبارت درست است؟

(۱) $31 \in C$

(۲) $5 \in C$

(۳) $13 \notin C$

(۴) $29 \in C$

پاسخ: گزینه ۱

$$4 \leq x - 1 < 30 \Rightarrow 5 \leq x < 31 \xrightarrow{x \in P} x \in \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$$

$$x + 2 \in \{7, 9, 13, 15, 19, 21, 25, 31\} \Rightarrow 31 \in C$$

۱۶۳. A, B و C سه مجموعه هستند و می دانیم تعداد اعضای $A - B, B - A, B - C, A - C, C - B$ و $C - A$ به ترتیب برابر ۳، ۲، ۲، ۴ و ۵ است.

تعداد اعضای $A - C$ چقدر است؟

(۱) ۳

(۲) ۲

(۳) ۱

(۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲ با توجه به نمودار ون برای این سؤال داریم:

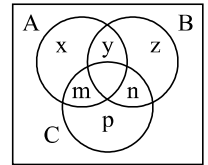
$$n(A - B) = 3 \rightarrow x + m = 3$$

$$n(B - A) = 2 \rightarrow z + n = 2$$

$$n(C - B) = 5 \rightarrow m + p = 5$$

$$n(B - C) = 2 \rightarrow y + z = 2$$

$$n(C - A) = 4 \rightarrow p + n = 4$$



اگر تساوی های سوم و پنجم را با هم جمع کرده و به جای $p + n$ در تساوی چهارم مقدار ۴ بگذاریم تساوی $z + m = 3$ به دست می آید.

$$(z + n) + (m + p) = z + m + \underbrace{n + p}_{=4} = 2 + 5 = 7 \Rightarrow z + m = 7 - 4 = 3$$

اگر تساوی های اول و دوم را با هم جمع کرده و به جای $z + m$ مقدار آن یعنی ۳ بگذاریم مقدار $x + y$ که همان $n(A - C)$ می باشد، برابر ۲ به دست می آید.

$$(x + m) + (y + z) = x + y + \underbrace{m + z}_{=3} = 3 + 2 = 5 \rightarrow x + y = 2 \Rightarrow n(A - C) = x + y = 2$$

۱۶۴. اگر دو مجموعه $A = \{4, \{a\}, \{b - 1, c - 7\}\}$ و $B = \{\{-2, 4\}, \{-b + 2\}, a + 1\}$ برابر باشند $a - b + c$ کدام است.

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$$\left. \begin{array}{l} 1) a + 1 = 4 \Rightarrow a = 3 \\ 2) -b + 2 = a \end{array} \right\} \Rightarrow -b + 2 = 3 \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1$$

$$3) \underbrace{\{-1, c - 7\}}_{-2} = \{-2, 4\} \Rightarrow c - 7 = 4 \Rightarrow c = 11 \Rightarrow a - b + c = 3 - (-1) + 11 = 4 + 11 = 15$$

۱۶۵. اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، کدام گزینه صحیح است؟

$A = B$ (۴)

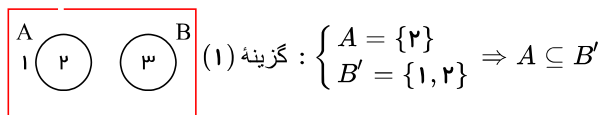
$A' \subseteq B'$ (۳)

$A \subseteq B$ (۲)

$A \subseteq B'$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا به کمک نمودار ون ناحیه ها را نام گذاری می کنیم:

M



۱۶۶. اگر $M = \mathbb{N}$ و $A = \{3n | n \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{3n - 1 | n \in \mathbb{N}\}$ و $C = \{3n - 2 | n \in \mathbb{N}\}$ باشد، آنگاه متمم $A \cup B \cup C$ کدام گزینه است؟

$A' \cup B' \cup C'$ (۴)

$M - A$ (۳)

M (۲)

$\emptyset$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$A = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$$

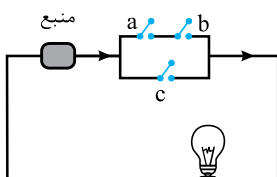
$$B = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$$

$$C = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$$

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}$$

$$(A \cup B \cup C)' = \mathbb{N}' = \mathbb{N} - \mathbb{N} = \emptyset$$

۱۶۷. در شکل مقابل احتمال آن که کلید a بسته باشد ۸٪ و احتمال بسته بودن کلید b ، ۴٪ و احتمال این که c بسته باشد ۳٪ است. احتمال آن که لامپ روشن باشد، چقدر است؟



۶۴٪ (۲)

۶۲٪ (۱)

۹۶٪ (۴)

۳۲٪ (۳)

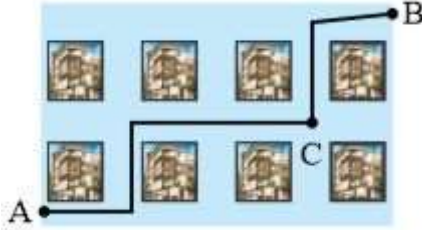
۱۰۰

پاسخ: گزینه ۱ برای روشن شدن کلید، یا کلید c باید بسته باشد یا a و b هر دو با هم بسته باشند. $(0.8 \times 0.4 = 0.32)$ پس :

a و b از هم مستقل هستند:

$$P = 0.3 + 0.8 \times 0.4 = 0.3 + 0.32 = 0.62 = 62\%$$

۱۶۸. در شکل مقابل، مسیر یک راهپیمایی از A به B را نشان می‌دهد که از بین ساختمان‌هایی که با مربع نشان داده‌ایم گذشته است. به طور کلی مسیرهایی به جز این مسیر وجود دارد. احتمال این که راهپیمایی از نقطه C بگذرد چقدر است؟ حرکت راهپیمایی طوری است که کوتاه‌ترین مسیر را انتخاب کنیم (یعنی به چپ و پایین حرکتی انجام نمی‌شود).



$$\frac{2}{5} \quad (2)$$

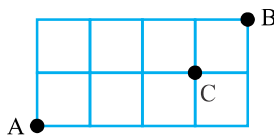
$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{4}{15} \quad (1)$$

$$\frac{8}{15} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

نکات محاسبه تعداد مسیرها را در بخش مسئله مسیر دیدیم:



کل مسیرها:

$$n(S) = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

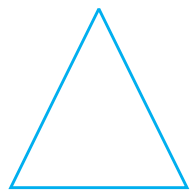
مطلوب:

$$n(A) = \frac{4!}{3!1!} \times \frac{2!}{1!1!} = 4 \times 2 = 8$$

احتمال:

$$P(A) = \frac{8}{15}$$

۱۶۹. در شکل مقابل نقطه‌ای داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ در نظر می‌گیریم. احتمال آن که این نقطه تا هر رأس فاصله‌اش بیش‌تر از $\frac{1}{2}$ باشد، چه قدر است؟



$$\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - 1 \quad (2)$$

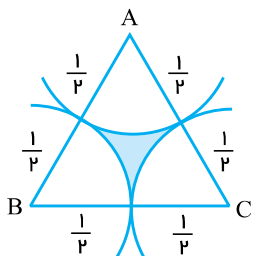
$$\pi\sqrt{3} - 3 \quad (4)$$

$$\frac{\pi\sqrt{3} - 1}{2} \quad (1)$$

$$1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

۳ کمان به شعاع $\frac{1}{2}$ به مرکز ۳ رأس رسم می‌کنیم. بخش‌هاشورخورده، شامل نقاطی است که تا رأس‌ها فاصله‌ای بیش از $\frac{1}{2}$ دارند.



احتمال مورد نظر برابر است با نسبت مساحت بخش‌هاشورخورده به مساحت کل مثلث.

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \quad \text{نکته: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع } a \text{ برابر است با:}$$

مساحت بخش سفید نیز در مجموع یک نیم‌دایره است؛ چون ۳ قطاع ۶۰ درجه، یک قطاع ۱۸۰ درجه یا نیم‌دایره تشکیل می‌شود.

پس:

$$S_{\text{سفید}} = \frac{1}{2} \times \pi R^2 = \frac{1}{2} \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}$$

$$S_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

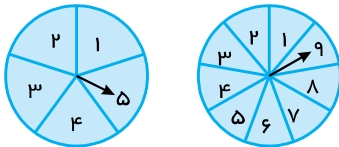
$$S_{\text{هائور}} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{8}$$

$$\frac{S_{\text{هائور}}}{S_{\text{کل}}} = \frac{\frac{2\sqrt{3} - \pi}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{4 \times (2\sqrt{3} - \pi)}{8\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{(2\sqrt{3} - \pi)}{\sqrt{3}} \rightarrow \frac{2\sqrt{3} - \pi}{2\sqrt{3}}$$

حالا چون در گزینه ها نداریم، مخرج کسر دومی را گویا می کنیم:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \Rightarrow P = 1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

۱۷۰. دو صفحه عقربه ای داریم. یکی به ۵ بخش مساوی و دیگری به ۹ بخش مساوی تقسیم شده اند. هر دو عقربه را می چرخانیم، با کدام احتمال دو عقربه در شماره های مختلف قرار می گیرند؟



$$\frac{5}{6} \quad \boxed{2}$$

$$\frac{8}{9} \quad \boxed{4}$$

$$\frac{4}{5} \quad \boxed{1}$$

$$\frac{6}{7} \quad \boxed{3}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$n(S) = 5 \times 9 = 45$$

حالت های نامطلوب ۵ تا بیش تر نیستند.

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$$

$$n(A) = 5$$

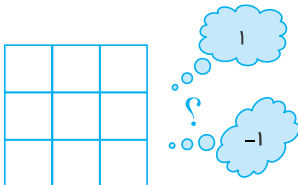
احتمال یکسان بودن جای دو عقربه:

$$P(A) = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$$

پس احتمال یکسان نبودن:

$$\frac{8}{9}$$

۱۷۱. می خواهیم داخل مربع های جدول مقابل اعداد ۱- و ۱+ را طوری قرار دهیم که ضرب اعداد در هر سطر یا ستون برابر ۱+ شود. این کار به چند حالت ممکن امکان پذیر است؟



$$6 \quad \boxed{2}$$

$$16 \quad \boxed{4}$$

$$4 \quad \boxed{1}$$

$$8 \quad \boxed{3}$$

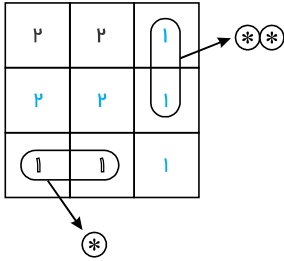
پاسخ: گزینه ۴

خانه اول و دوم هر کدام دو حالت و خانه سوم باید یک حالت باشد، چون باید ضرب سه عدد ۱+ شود، برای سومین خانه انتخابی نداریم.

۲	۲	۱

اگر ضرب دو عدد ۱- باشد، باید ۱- قرار دهیم و اگر ضرب دو عدد ۱+ باشد باید ۱+ قرار دهیم.

سطر بعدی هم به همین ترتیب پر می‌شود. و ستون سوم یک حالت است، خانه آخری هم یک حالت است؛ پس تعداد کل حالت‌ها:



$$\text{حالت } 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

توضیح زیر برای آنان که بیش‌تر وسواس دارند!

ولی در خانه آخر؟! آیا واقعاً ۱ حالت است یا اصلاً امکان پر شدن ندارد! شاید حاصل ضرب دو عدد افقی (*) با حاصل ضرب دو عدد عمودی (**) هم‌علامت نباشد؟! اگر چنین باشد که اصلاً امکان ندارد آخرین خانه پر شود؛ ولی اگر دقت کنید، چنین چیزی غیرممکن است، چون ضرب دو عدد افقی (*) همان حاصل ضرب ۴ عدد بالایی است و حاصل ضرب ۲ عدد عمودی (**) نیز حاصل ضرب همان چهارخانه است و تفاوتی ندارند!

۱۷۲. مجموعه $\{7, 77, 777, \dots\}$ به زبان ریاضی کدام است؟

$\left\{\frac{10^n - 1}{9} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ (۱)
 $\{7 \frac{10^n - 1}{9} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (۲)
 $\{7(10^n - 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ (۳)
 $\left\{\frac{9}{7}(10^n - 1) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲ این سؤال، سؤال مادر است! یادش بگیر!!!

نکته: سری‌هایی به شکل ۱، ۱۱، ۱۱۱ و یا ۲، ۲۲، ۲۲۲ و ... را به کمک مجموعه ۹، ۹۹، ... می‌توان ساخت:

$$\{9, 99, 999, \dots\} = \{10^n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\{1, 11, 111, \dots\} = \left\{\frac{10^n - 1}{9} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\{2, 22, 222, \dots\} = \left\{2 \times \frac{10^n - 1}{9} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\{7, 77, 777, \dots\} = \left\{7 \times \frac{10^n - 1}{9} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

۱۷۳. اگر تاسی را دوبار بیندازیم، احتمال اینکه مجموع دو عدد رو شده مضرب ۵ باشد، کدام است؟

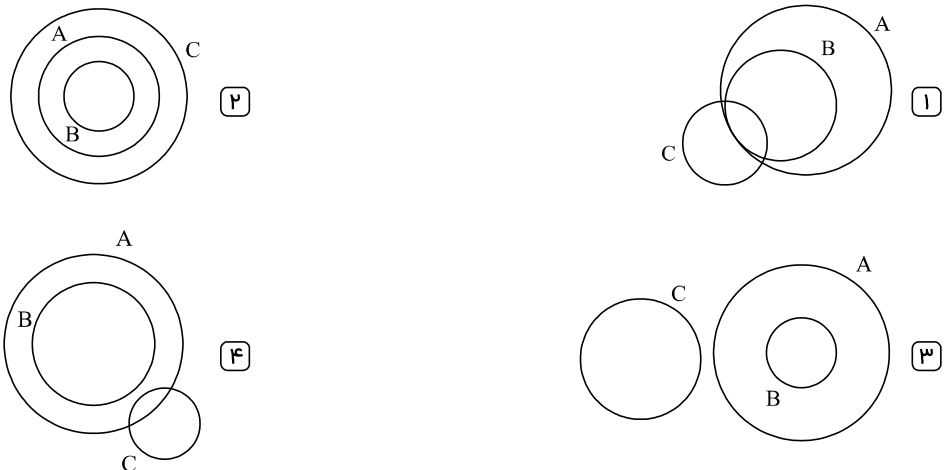
$\frac{5}{26}$ (۱)
 $\frac{7}{36}$ (۲)
 $\frac{1}{4}$ (۳)
 $\frac{1}{6}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۲ به ازای هر عدد برای پرتاب اول، ۶ عدد برای پرتاب دوم وجود دارد. بنابراین، تعداد کل حالت‌ها برابر $36 = 6 \times 6 = n(S)$ خواهد بود.

$$A = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 6), (6, 4), (5, 5)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{36}$$

۱۷۴. مجموعه مقسوم علیه‌های عدد ۲۴، B مجموعه مقسوم علیه‌های عدد ۶ و C مجموعه مقسوم علیه‌های عدد ۳۹ است. کدام گزینه نموداری مناسب برای این مجموعه‌ها است؟



پاسخ: گزینه ۱ عضوهای ۳ مجموعه را مشخص می‌کنیم:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$C = \{1, 3, 13, 39\}$$

در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow B \subset A$$

$$A \cap B \cap C = \{1, 3\}$$

۱۷۵. پرتاب یک تاس احتمال آن که عدد رو شده مضرب ۲ باشد چقدر است؟

$$\frac{1}{6} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۲ کل حالات و حالات مورد نظر را تعیین می‌کنیم:

$$A = \{2, 4, 6\} \rightarrow n(A) = 3$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n(S) = 6$$

$$\Rightarrow \text{احتمال مطلوب: } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

۱۷۶. مجموعه‌ای ۱۲۸ زیرمجموعه دارد. تعداد عضوهای این مجموعه چقدر است؟

$$7 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$8 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴ یادآوری: اگر تعداد عضوهای یک مجموعه برابر n باشد، تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر است با: 2^n .

$$2^n = 128 \rightarrow 2^n = 2^7 \rightarrow n = 7$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

۱۷۷. کدام یک از گزینه‌های یک مجموعه می‌باشد؟

$$(2) \text{ زیباترین شهرهای دنیا}$$

$$(1) \text{ بهترین بازیکن‌های تاریخ فوتبال}$$

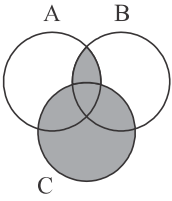
$$(4) \text{ سه فضاوردی که اولین بار به کره ماه قدم گذاشتند.}$$

$$(3) \text{ اعداد خیلی کوچک}$$

پاسخ: گزینه ۴ توجه: در تعریف مجموعه این نکته نباید فراموش شود که اعضا باید مشخص باشند.

طبق حرفی که زدیم گزینه ۱، ۲ و ۳ سلیقه‌ای هستند یعنی اعضا آنها کاملاً مشخص نیست اما گزینه ۴ «سه عضو آن کاملاً مشخص هستند».

۱۷۸. اگر $A = \{x^2 | x \in \mathbb{N}, x < 5\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{N}, -1 < x < 10\}$ و $C = \{\sqrt{x} | x \in \mathbb{W}, 5 < x < 17\}$ باشد، در ناحیه هاشور خورده چند عضو دارد؟



۱۳ (۲)

۱۲ (۱)

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا اعضای سه مجموعه A ، B و C را مشخص می‌کنیم.

$$A = \{x^2 | x \in \mathbb{N}, x < 5\} = \{1, 4, 9, 16\}$$

$$B = \{x | x \in \mathbb{N}, -1 < x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$C = \{\sqrt{x} | x \in \mathbb{W}, 5 < x < 17\}$$

$$= \{\sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, 3, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, 4\}$$

$$A \cap B = \{1, 4, 9\}$$

$$A \cap B \cap C = \{4\}$$

قسمت رنگ شده برابر است با:

$$n(C) + n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) = 11 + 3 - 1 = 13$$

۱۷۹. اگر $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 6\}$ ، تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی A که فقط دو عضو اول دارند، کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

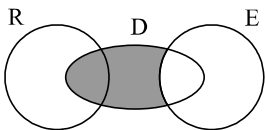
پاسخ: گزینه ۳ ابتدا مجموعه A را با عضوهای مشخص می‌کنیم.

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x < 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

زیرمجموعه‌های چهار عضوی را که فقط دو عضو اول دارند، مشخص می‌کنیم:

$$\{2, 3, 4, 5\}, \{2, 5, 1, 4\}, \{3, 5, 1, 4\}$$

۱۸۰. در نمودار ون زیر که مربوط به مردم تحصیل کرده یک شهر است، اگر E مجموعه کسانی باشد که مسلط به زبان انگلیسی هستند و R مجموعه کسانی باشد که ریاضی‌دان هستند و D مجموعه دانشجویان شهر را برای ما نمایش دهد، آنگاه قسمت خاکستری شامل کدام یک از گزینه‌های زیر خواهد بود؟



(۱) دانشجویان ریاضی‌دان مسلط به زبان انگلیسی.

(۲) دانشجویان مسلط به زبان انگلیسی که ریاضی‌دان نیستند.

(۳) دانشجویانی که مسلط به زبان انگلیسی نیستند.

(۴) ریاضی‌دانانی که مسلط به زبان انگلیسی هستند.

پاسخ: گزینه ۳

قسمت خاکستری نمودار ون بالا مربوط به مجموعه $(R \cap D) \cup D - E$ است و در واقع مربوط به دانشجویان ریاضیدان و دانشجویانی است که مسلط به زبان انگلیسی نیستند.

البته احتمالاً منظور سؤال همان گزینه ۳ است اما به جواب ۳ ایراد وارد است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: نادرست است. هیچ قسمتی از مجموعه E رنگ نشده است، پس این دانشجویان مسلط به زبان انگلیسی نیستند.

گزینه ۲: نادرست است. مشابه گزینه ۱.

گزینه ۳: در نمودار ون، از مجموعه دانشجویان، آن‌هایی که مسلط به انگلیسی هستند، حذف شده است. $D - E$

گزینه ۴: نادرست است. مشابه گزینه ۱.

۱۸۱. در پرتاب دو تاس احتمال آنکه مجموع دو عدد رو شده برابر ۱۰ باشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{12}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{18}$

پاسخ: گزینه ۱ فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس برابر $6 \times 6 = 36$ است.

حال حالت‌هایی که در پرتاب دو تاس مجموع ۱۰ داریم را می‌نویسیم و با مجموعه A نشان می‌دهیم.

$$A = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5)\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

۱۸۲. یک صفحه دایره‌ای شکل عقربه‌دار با ۴ قسمت رنگی سفید، آبی، قرمز و سیاه به ترتیب با زاویه‌های ۱۵۰، ۹۰ و ۷۰ درجه درج شده است. با چرخش تصادفی، با کدام احتمال عقربه در ناحیه قرمز قرار نمی‌گیرد؟

- (۱) $\frac{7}{36}$ (۲) $\frac{28}{36}$ (۳) $\frac{8}{36}$ (۴) $\frac{29}{36}$

پاسخ: گزینه ۴



برای به دست آوردن احتمال اینکه عقربه روی قرمز نایستد از 360° (دایره کامل) قسمت قرمز (50°) را کم می‌کنیم:

$$360 - 50 = 290$$

$$\frac{290}{360} = \frac{29}{36}$$

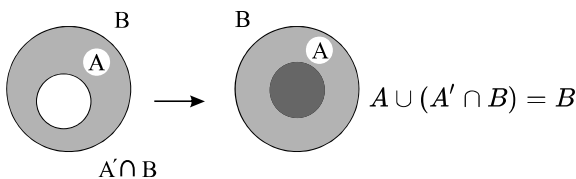
۱۸۳. اگر $A \subseteq B$ باشد، در این صورت $A \cup (B \cap A')$ برابر است با:

- (۱) A (۲) A' (۳) B (۴) B'

پاسخ: گزینه ۳ راه حل اول:

$$A \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A \cup A') = (A \cup B) \cap (M) = A \cup B \quad \underline{\underline{A \subseteq B}}$$

راه حل دوم: با استفاده از نمودار ون می‌توان به راحتی به جواب رسید.



نکته: اجتماع هر مجموعه با متممش برابر مجموعه (M) (مجموعه همه مجموعه‌ها) است و اشتراک هر مجموعه با مجموعه (M) برابر خود مجموعه است.

۱۸۴. کدام یک از مجموعه‌های زیر با بقیه مجموعه‌ها برابر نیست؟

(۲)

مجموعه ۳ عدد زوج طبیعی متوالی که اندازه ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه هستند.

(۱) مجموعه ۳ عدد زوج طبیعی متوالی که حاصل جمع آن‌ها برابر ۲۴ است.

- (۳) $\{K | K \in \mathbb{N}, 3 \leq 2K \leq 5\}$ (۴) $\{2K | K \in \mathbb{N}, 3 \leq K \leq 5\}$

پاسخ: گزینه ۳ اعضای هر مجموعه را به دست می‌آوریم.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: اگر عدد زوج x را در نظر بگیریم، دو عدد زوج قبل و بعد آن $x-2$ و $x+2$ می‌باشد، پس:

$$x-2 \text{ و } x+2$$

$$x = x-2 + x+2 = 24 \rightarrow x = 8$$

اعداد زوج مجموعه ۱ و ۸ و ۶ هستند، پس $A = \{6, 8, 10\}$

گزینه ۲: سه عدد زوج متوالی که در رابطه فیثاغورس صدق کند، ۱۰ و ۸ و ۶ هستند.

$$6^2 + 8^2 = 10^2 \quad A = \{6, 8, 10\}$$

گزینه ۳:

$$\{k | k \in \mathbb{N}, 3 \leq 2k \leq 5\} = \{2\}$$

گزینه ۴:

$$A = \{2 \times 3, 2 \times 4, 2 \times 5\} = \{6, 8, 10\}$$

مجموعه‌های مربوط به گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴ با هم برابرند، ولی گزینه ۳ با سایر مجموعه‌ها برابر نیست.

$$۱۸۵. \text{ مجموعه } A = \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x \leq 2, y \leq 2 \right\} \text{ چند زیرمجموعه دارد؟}$$

۱۶ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا سعی می‌کنیم اعضای A را مشخص کنیم چون $x, y \in \mathbb{N}$ و $x \leq 2$ و $y \leq 2$ در این صورت x و y می‌تواند اعداد ۱ و ۲ باشد پس با جای گذاری x و y در $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ خواهیم داشت:

$$x = 1, y = 1 \Rightarrow \frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 0$$

$$x = 2, y = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = -\frac{1}{2}$$

$$x = 1, y = 2 \Rightarrow \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x = 2, y = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

پس A دارای ۳ عضو $\{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ و $A = \{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ زیرمجموعه است.

$$۱۸۶. \text{ کوچک ترین عضو مجموعه } A = \{x^y \mid x, y \in \mathbb{N}, x - y = 7\} \text{ کدام است؟}$$

۶۴ (۴)

۸ (۳)

۱ (۲)

$\emptyset$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$x^y = 8^{2 \times 1} = 8^2 = 64$$

x	y	$x - y$
۸	۱	۷
۹	۲	۷
۱۰	۳	۷

$$۱۸۷. \text{ مجموعه } A = \{2^{xy} \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 5\} \text{ با کدام مجموعه‌ی زیر برابر است؟}$$

$\{\}$ (۴)

$\{x \mid x^2 = 64\}$ (۳)

$\{16, 64\}$ (۲)

$\{2, 4, 8, 16\}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$A = \{2^{xy} \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 5\} = \{2^{1 \times 4}, 2^{2 \times 3}\} = \{2^4, 2^6\} = \{16, 64\}$$

یا ۱، ۴ هستند یا ۳، ۲

$$۱۸۸. \text{ تعداد اعضای مجموعه } A = \{5x^2 - 3 \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 - 1 < 18\}$$

۵ (۴)

۹ (۳)

۴ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

مجموعه A را با اعضایش مشخص می‌کنیم:

$$x^2 - 1 < 18 \Rightarrow x^2 < 19$$

$$\Rightarrow x = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\} \Rightarrow x^2 = \{0, 1, 16, 81, 256\}$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 3 = \{-3, 2, 77, 402, 1277\}$$

$$\Rightarrow n(A) = 5$$

۱۸۹. مجموعه‌ی $\{(\frac{1}{p})^x \mid x \in \mathbb{N}, x \geq 1\}$ را به کدام صورت زیر می‌توان نوشت؟

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\} \quad \text{۴}$$

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} \quad \text{۳}$$

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right\} \quad \text{۲}$$

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\} \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\left\{\left(\frac{1}{p}\right)^x \mid x \in \underbrace{\mathbb{N}}_{\substack{\downarrow \\ \text{اعداد طبیعی} \\ 1, 2, 3, \dots}}, x \geq 1\right\} \quad \left(\frac{1}{p}\right)^x = \begin{cases} \left(\frac{1}{p}\right)^1 = \frac{1}{p} \\ \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1}{p^2} \\ \left(\frac{1}{p}\right)^3 = \frac{1}{p^3} \end{cases}$$

۱۹۰. اگر مجموع $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, -7 \leq x \leq 4\}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

$$\sqrt{16} \in B \quad \text{۴}$$

$$(-8 + 11) \notin B \quad \text{۳}$$

$$-\left(\frac{-6}{+3}\right) \in B \quad \text{۲}$$

$$-7 \notin B \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۳

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, -7 \leq x \leq 4\} \rightarrow B = \{1, 2, 3, 4\}$$

نادرست است $(-8 + 11) = +3 \notin B$ گزینه ۳

درست است $-7 \notin B$ گزینه ۱

درست است $-\left(\frac{-6}{+3}\right) = -(-2) = +2 \in B$ گزینه ۲

درست است $\sqrt{16} = 4 \in B$ گزینه ۴

۱۹۱. مجموعه‌ی مقابل چند زیرمجموعه دارد؟ $A = \{\{\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}$

$$4 \quad \text{۴}$$

$$2 \quad \text{۳}$$

$$8 \quad \text{۲}$$

$$3 \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\{\} = \emptyset \quad A = \underbrace{\{\{\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}}_{\substack{\downarrow \\ \text{عضو تکراری}}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \Rightarrow n(A) = 2$$

$$\Rightarrow 2^2 = 4 = \text{تعداد زیرمجموعه‌ها}$$

۱۹۲. مجموعه «تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی عددهای طبیعی بین ۱ و ۴» کدام است؟

$$\{2, 3\} \quad \text{۴}$$

$$\{\{2, 3\}\} \quad \text{۳}$$

$$\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\} \quad \text{۲}$$

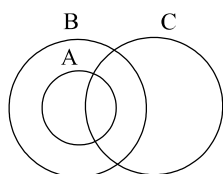
$$\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, \emptyset \quad \text{۱}$$

پاسخ: گزینه ۲ مجموعه‌ی عددهای طبیعی بین ۱ و ۴ به صورت $\{2, 3\}$ می‌باشد که زیرمجموعه‌های آن به صورت زیر است:

$$\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}$$

حال کافی است این عضوها را داخل یک مجموعه قرار دهیم تا مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی عددهای طبیعی بین ۱ و ۴ را بسازیم:

$$\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$$



$$A \subseteq B \subseteq C \quad \text{۲}$$

$$A \not\subseteq B \quad \text{۴}$$

$$A \subseteq C \subseteq B \quad \text{۱}$$

$$\emptyset \subseteq A \subseteq B \quad \text{۳}$$

پاسخ: گزینه ۳

مجموعه‌ی C زیرمجموعه‌ی هیچ‌کدام از مجموعه‌های B و A نیست و مجموعه‌های A و B نیز هیچ‌کدام زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی C نیستند، پس گزینه‌های (۱) و (۲)

عبارات درستی نیستند. می‌دانیم $\emptyset$ زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها است و با توجه به نمودار، تمام اعضای A و B وجود دارد؛ به طوری که $\emptyset \subseteq A \subseteq B$ عبارتی صحیح

است.

۱۹۴. اگر برای دو مجموعه S و A داشته باشیم $n(S - A) = 5$ و $n(A \cap S) = 7$ و S کل حالات و A مجموعه‌ی حالت‌های مطلوب باشد، احتمال اینکه A اتفاق نیافتد کدام است؟

$\frac{7}{12}$ (۴)

$\frac{5}{7}$ (۳)

$\frac{1}{6}$ (۲)

$\frac{5}{12}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$n(S - A) = n(S) - n(A \cap S)$$

$$5 = n(S) - 7 \Rightarrow n(S) = 12$$

و چون $P(A) = \frac{7}{12}$ پس $A \subseteq S \Rightarrow n(A \cap S) = n(A) = 7$

و در نتیجه اگر A اتفاق نیافتد برابر می‌شود با $1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

۱۹۵. در پرتاب همزمان دو تاس، مجموع دو عدد را x می‌نامیم، احتمال آمدن x بیشتر است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ تعداد کل حالت‌ها برای گزینه‌ها برابر است پس تعداد حالت‌های مجموع دو عدد را برای گزینه‌ها بررسی می‌کنیم.

گزینه‌ی ۱: ۴ حالت $\Rightarrow \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ (مجموع دو عدد برابر ۵ باشد) $x = 5$

گزینه‌ی ۲: ۵ حالت $\Rightarrow \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\}$ (مجموع دو عدد برابر ۶ باشد) $x = 6$

گزینه‌ی ۳: ۶ حالت $\Rightarrow \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$ (مجموع دو عدد برابر ۷ باشد) $x = 7$

گزینه‌ی ۴: ۵ حالت $\Rightarrow \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\}$ (مجموع دو عدد برابر ۸ باشد) $x = 8$

پس بیشترین حالت ممکن برای $x = 7$ است. یعنی مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ باشد دارای احتمال بیشتری نسبت به سایر گزینه‌ها است.

۱۹۶. در یک مسابقهٔ تلویزیونی دو گروه سه نفری A و B شرکت کرده‌اند. در این مسابقه هر یک از آن‌ها نفری از تیم مقابل را انتخاب می‌کند. اگر دو نفر یکدیگر را انتخاب کرده باشند، برنده شده و یک تور مسافرتی جایزه می‌گیرند. با چه احتمالی هر سه برنده می‌شوند؟ (با تقریب کمتر از ۰٫۱٪)

۱۶٫۷٪ (۴)

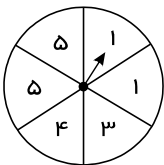
۲٫۵٪ (۳)

۰٫۸٪ (۲)

۰٫۲٪ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 16,66\% \simeq 16,7\%$$



۱۹۷. همهٔ حالت‌های ممکن ایستادن عقربه روی اعداد چرخندهٔ مقابل چه تعداد است؟

۳ (۲)

۶ (۱)

۵ (۴)

۴ (۳)

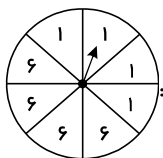
پاسخ: گزینه ۳ مجموعهٔ تمام حالت‌های ممکن را با S نمایش می‌دهیم و داریم: $S = \{1, 3, 4, 5\}$

بنابراین $n(S) = 4$

۱۹۸. احتمال رخداد کدام پیشامد برابر $\frac{4}{6}$ است؟

(۲) احتمال خارج شدن مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ قرمز دارد.

(۱) احتمال رو شدن اعداد کمتر از ۵ در پرتاب تاس سالم



(۴) احتمال ایستادن عقربهٔ چرخندهٔ روبه‌رو، روی عدد ۱:

(۳) احتمال به دنیا آمدن فرزند دختر در خانواده‌ای که ۳ فرزند پسر دارد.

پاسخ: گزینه ۱ کل حالت‌های پرتاب یک تاس ۶ تا است که تعداد حالت‌های مطلوب (۱، ۲، ۳، ۴) ۴ تا است.

احتمال هر پیشامد را در گزینه‌های دیگر به دست می‌آوریم:

گزینه (۲): احتمال خارج شدن مهره سبز $\frac{4}{10}$

گزینه (۳): احتمال به دنیا آمدن فرزند دختر $\frac{1}{2}$

گزینه (۴): احتمال ایستادن عقربه چرخنده روی عدد ۱، $\frac{4}{8}$

۱۹۹. در کیسه‌ای ۷ توپ سفید، ۸ توپ سیاه و ۲ توپ سبز وجود دارد. خانمی بدون نگاه کردن به آن‌ها و بدون برگرداندن توپ‌ها آن‌ها را بیرون می‌اندازد. حداقل چند توپ را باید از کیسه بیرون بکشد تا مطمئن شود که ۳ توپ از یک رنگ بیرون آورده است؟

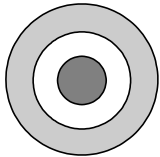
- ۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۳ بدترین حالت را در نظر می‌گیریم:

$$۶ \text{ توپ} = ۲ \text{ توپ سیاه} + ۲ \text{ توپ سیاه} + ۲ \text{ توپ سبز}$$

حال اگر یک توپ دیگر بردارد، قطعاً سه توپ از یک رنگ بیرون آورده است.

۲۰۰. یک تابلو خاص از ۳ تا دایره هم مرکز تشکیل شده است. و نسبت شعاع این ۳ دایره: ۱، ۲ و ۳ است. نقطه‌ای به دلخواه انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که نقطه در حلقه بیرونی قرار گیرد چند برابر آن است که نقطه در دایره مرکزی بیفتد؟



- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳ شعاع دایره‌ها را r ، $2r$ ، $3r$ در نظر می‌گیریم.

$$\pi(3r)^2 - \pi(2r)^2 = 5\pi r^2$$

مساحت حلقه بیرونی برابر است با:

مساحت دایره مرکزی برابر است با:

$$\pi r^2$$

$$\text{نسبت احتمالات} = \frac{5\pi r^2}{\pi r^2} = 5$$

۲۰۱. بیشترین تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه‌ای هفت عضوی که اشتراک هر دو تای آنها دقیقاً تک عضوی است، کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۳ به ازای هر عضو مشخص حداکثر $\frac{7-1}{2} = 3$ زیرمجموعه سه عضوی وجود دارد که در آن عضو مشترک‌اند و چون همه‌ی زیرمجموعه‌ها باید با

هر کدام از زیرمجموعه‌های دیگر اشتراک داشته باشند تعداد همچون زیرمجموعه‌هایی نمی‌تواند از $3 \times 3 = 9$ بیشتر باشد. به علاوه اگر یکی از زیرمجموعه‌ها را مشخص کنیم واضح است که آن زیرمجموعه در محاسبه کردن سه بار ظاهر می‌شود پس کران را می‌توان به $9 - 3 + 1 = 7$ تقلیل داد. خانواده ۷ عضوی از زیرمجموعه‌های سه عضوی $\{1, 2, \dots, 7\}$ که در شرط مسئله صدق می‌کند:

- $\{1, 2, 3\}$ $\{1, 6, 7\}$
 $\{1, 4, 5\}$ $\{2, 5, 7\}$
 $\{2, 4, 9\}$ $\{3, 5, 6\}$
 $\{3, 4, 7\}$

۲۰۲. اگر $A = \{x^2 - m \mid x \in Z, -3 < x \leq m\}$ و $B = \left\{x \mid \frac{x}{3} \in Z, -4 < x \leq 12\right\}$ باشند آنگاه مجموعه $A - B$ حداقل چند عضو دارد؟

- ۱) عضوی ندارد ۲) ۱ عضو ۳) ۲ عضو ۴) ۴ عضو

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا مجموعه B را با اعضایش مشخص می‌کنیم:

$$B = \left\{x \mid \frac{x}{3} \in Z, -4 < x \leq 12\right\} = \{-3, 0, 3, 6, 9, 12\}$$

سپس حالت‌های مختلف m را برای مجموعه‌ی A در نظر می‌گیریم و مشخص می‌شود که در حالت $m = 4$ بین اعضای A و B سه عضو مشترک وجود دارد.

$$\Rightarrow m = 4 \Rightarrow A = \{x^2 - 4 \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x \leq 4\}$$

$$= \{(-2)^2 - 4, (-1)^2 - 4, 0^2 - 4, 1^2 - 4, 2^2 - 4, 3^2 - 4, 4^2 - 4\}$$

$$\Rightarrow A = \{0, -3, -4, -3, 0, 5, 12\} = \{0, -3, -4, 5, 12\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{0, -3, 12\} \Rightarrow A - B = \{-4, 5\}$$

۲۰۳. شخصی یک بلیط بخت آزمایی به شماره ۶۸ خریداری کرده و روی هم ۱۰۰ بلیط فروخته شده است. کدام یک از اعداد زیر احتمال اینکه او برنده جایزه‌ی نخست شود را مشخص می‌کند؟

۱۰۰ تا ۱ (۴)

۶۸٪ (۳)

$\frac{1}{100}$ (۲)

۰٫۶۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ این که شماره بلیط چند باشد تأثیری در جواب سوال ندارد.

$$\text{احتمال} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مورد نظر}}{\text{تعداد کل بلیط‌های فروخته شده}} = \frac{1}{100}$$

۲۰۴. اگر $A \subseteq B \subseteq C$ باشد، آنگاه کدام یک از مجموعه‌های زیر همواره تهی می‌باشد؟

$(A - B) \cap (C - B)$ (۴)

$(B - C) \cup (B - A)$ (۳)

$B - (A \cap C)$ (۲)

$A \cup (B - C)$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

$$A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A - B = \emptyset$$

و اشتراک تهی با هر مجموعه دیگری برابر تهی است پس:

$$(A - B) \cap (C - B) = \emptyset$$

۲۰۵. ۸ کارت داریم که هر کدام شماره‌ای را نشان می‌دهند ۴ تا زوج و بقیه فرد اگر ۲ کارت را به دلخواه برداریم احتمال آنکه مجموع آن‌ها فرد شود چقدر است؟

$\frac{5}{8}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{4}{7}$ (۲)

$\frac{3}{7}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ حاصل جمع دو عدد که یکی زوج و دیگری فرد باشد فرد می‌شود. اگر یکی از کارت‌ها را برداریم چه فرد چه زوج دیگری باید خلاف آن باشد که احتمال $\frac{4}{7}$ می‌باشد.

$$n(S) = \binom{8}{2} = 28, \quad n(A) = \binom{4}{1} \binom{4}{1} = 16 \rightarrow P(A) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$$

۲۰۶. شما دو تاس معمولی را پرتاب می‌کنید احتمال آن که هیچ یک از دو تاس با عدد اول رو نشود چقدر است؟

$\frac{9}{16}$ (۴)

$\frac{4}{9}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{9}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

تاس (۲) اول نباشد و تاس (۱) اول نباشد $A = \{1\}$ پیشامد دلخواه سوال

تاس = اعداد غیر اول تاس $\{1, 4, 6\}$

$$P(A) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۲۰۷. سه تاس را همزمان می‌اندازیم و عددهای رویشان را جمع می‌کنیم چند مقدار مختلف ممکن است به دست بیاید؟

۱۵ (۴)

۱۶ (۳)

۱۷ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ با سه تاس هر عدد از ۳ تا ۱۸ به دست می‌آید.

$$18 - 3 + 1 = 16$$

۲۰۸. حاصل $(A \cap B) \cap (A \cap B')$ کدام است؟

$A \cap B$ (۴)

$\emptyset$ (۳)

A (۲)

B (۱)

پاسخ: گزینه ۳ در پراونت اول بخشی از B و در پراونت دوم بخشی از B' مورد نظر است چون B و B' اشتراک ندارند پس اشتراک حاصل تهی است.

۲۰۹. در کشوری بخشی از مردم فقط انگلیسی و بخشی از مردم فقط فرانسوی صحبت می کنند و بقیه هر دو زبان را صحبت می کنند معلوم شده که ۸۵٪ مردم این کشور می توانند انگلیسی صحبت کنند و ۷۵٪ مردم می توانند فرانسوی صحبت کنند چند درصد از مردم این کشور می توانند هم انگلیسی هم فرانسوی صحبت کنند؟

(۴) ۶۰٪

(۳) ۲۵٪

(۲) ۷۵٪

(۱) ۵۰٪

پاسخ: گزینه ۴

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$100 = 85 + 75 - x \rightarrow 100 = 160 - x \Rightarrow x = 60$$

۲۱۰. مجموعه های A و B به ترتیب دارای ۵ عضو و ۷ عضو می باشند و $A \cap B = \{2, 4, 6\}$ ، مجموعه $A \cup B$ چند عضو دارد؟

(۴) ۱۰

(۳) ۹

(۲) ۸

(۱) ۷

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به رابطه ی

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = 5 + 7 - 3 = 9$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = 9$$

پس تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ برابر ۹ عضو است.

۲۱۱. مجموعه ی دلخواه B همواره با کدام یک از مجموعه های زیر برابر است؟

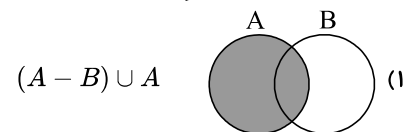
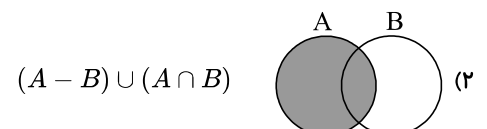
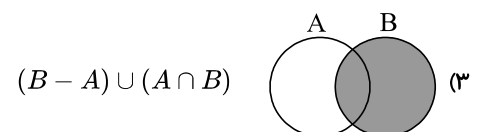
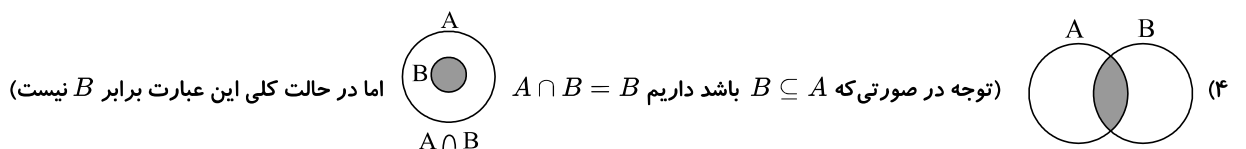
(۴) $A \cap B$

(۳) $(B - A) \cup (A \cap B)$

(۲) $(A - B) \cup (A \cap B)$

(۱) $(A - B) \cup A$

پاسخ: گزینه ۳ نمودار ون مربوط به هر گزینه را رسم می کنیم (فرض کنیم A و B دو مجموعه دلخواه باشند)



۲۱۲. فرض کنید $\{x, y, z, t\} = \{1, 2, 3, 4\}$ یکی از مقسوم علیه های $z^2 + t^2$ است. کدام گزینه درست است؟ (روبوکاپ - چهارمین دوره ۱۳۸۴)

(۴) $1 \in \{z, t\}$

(۳) $3 \in \{z, t\}$

(۲) $2 \in \{z, t\}$

(۱) $4 \in \{z, t\}$

پاسخ: گزینه ۱ راه اول:

$$(۱) \text{ فرض کنیم } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \leftarrow x^2 + y^2 = 5 \text{ و } \begin{cases} z = 3 \\ t = 4 \end{cases} \leftarrow z^2 + t^2 = 25 \text{ این حالت قابل قبول است.}$$

$$(۲) \text{ فرض کنیم } \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \leftarrow x^2 + y^2 = 10 \text{ و } \begin{cases} z = 2 \\ t = 4 \end{cases} \leftarrow z^2 + t^2 = 20 \text{ این حالت قابل قبول است. مشاهده می شود که ۴ در هر دو حالت عضو } \{z, t\}$$

است.

راه دوم:

چون $x^2 + y^2$ مقسوم علیه $z^2 + t^2$ است، پس $x^2 + y^2$ کوچکتر مساوی $z^2 + t^2$ خواهد بود و در نتیجه ۴ باید عضو $\{z, t\}$ باشد.

۲۱۳. $x \in Z$ باشد آنگاه کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟

- ۱) $\sqrt{x^2 + 1} \in Z$ برای همه x ها
۲) $\sqrt{x^2 + 1} \in Z$ برای بعضی x ها
۳) $\sqrt{x^2 + 1} \in Q$ به ازای هیچ مقدار x
۴) $\sqrt{x^2 + 1} \in N$ برای همه x ها

پاسخ: گزینه ۲ گزینه های غلط را با مثال ها رد می کنیم

$$x = 1, \sqrt{1^2 + 1} = \sqrt{2} \notin Z \quad (1)$$

$$x = 0, \sqrt{0^2 + 1} = 1 \in Z \quad (2)$$

$$(3) \text{ وجود دارد } x = 0 \in Z \text{ به طوریکه } \sqrt{0^2 + 1} = 1 \in Q$$

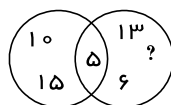
$$x = 1, \sqrt{1^2 + 1} = \sqrt{2} \notin N \quad (4)$$

۲۱۴. کدام گزینه نادرست است؟

- ۱) $a, b \in Z \Rightarrow a \times b \in Z$ ۲) $a, b \in Z \Rightarrow a - b \in Z$ ۳) $a, b \in Z \Rightarrow a + b \in Z$ ۴) $a, b \in Z \Rightarrow \frac{a}{b} \in Z$

پاسخ: گزینه ۴ با کمی دقت در گزینه ها به راحتی معلوم می شود که اگر دو عضو از اعداد صحیح را در نظر بگیریم لزوماً تقسیم آن ها بر هم عضو اعداد صحیح نخواهد بود. مانند $1 \in Z, 2 \in Z \Rightarrow \frac{1}{2} \notin Z$

۲۱۵. باتوجه به نمودار ون زیر و مجموعه های داده شده، به جای ؟ کدام عدد باید قرار بگیرد؟



$$A = \{5, 10, 15\}$$

$$B = \{5, 6, 7, 13\}$$

۷ (۴)

۱۵ (۳)

۱۳ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ باتوجه به اعضای B همانطور که در نمودار مشخص است، تمام اعضای B در نمودار آن آمده به جز عضو ۷، بنابراین به جای ؟ عدد ۷ را قرار می دهیم.

۲۱۶. کدام عبارت و عدد زیر به ترتیب متناظر مجموعه A و تعداد اعضای آن است؟

$$A = \{7, 14, 21, \dots, 91, 98\}$$

۲) عددهای طبیعی مضرب ۷ - ۱۴

۱) عددهای طبیعی فرد کمتر از ۹۹ - ۱۵

۴) مضرب های طبیعی و کوچکتر از ۱۰۰: عدد ۷ - ۱۴

۳) مضرب های صحیح عدد ۷ و کمتر از ۱۰۰ - ۱۵

پاسخ: گزینه ۴ پاسخ: مجموعه A نشان دهنده مضارب طبیعی و کوچکتر از ۱۰۰ عدد ۷ است که تعداد آن را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$A = \{7, 14, 21, \dots, 91, 98\}$$

$$= \{1 \times 7, 2 \times 7, 3 \times 7, \dots, 13 \times 7, 14 \times 7\}$$

پس ۱۴ تا از مضرب های ۷ در مجموعه A هست بنابراین A ، ۱۴ عضو دارد.

۲۱۷. چند تا از عبارت های زیر قطعاً صحیح است؟

۱) $A \cup B = A \cup C \rightarrow B = C$

۲) $A \cap B = A \cap C \rightarrow B = C$

۳) $A \cap B = \emptyset \rightarrow A \cup B = M$

۴) سه تا

۳) دوتا

۲) یکی

۱) صفر

پاسخ: گزینه ۱ برای هر عبارت مثال نقض می آوریم:

۱) $A = \{4\}$, $B = \{4, 7\}$, $C = \{7\}$

$$\rightarrow A \cup B = A \cup C, B \neq C$$

$$۲) A = \{۴, ۷\}, B = \{۴\}, C = \{۱۱, ۴\}$$

$$\rightarrow A \cap B = A \cap C, B \neq C$$

۳) قطعاً این عبارت تنها در حالتی صحیح است که B متمم A باشد و همیشه صحیح نیست

۲۱۸. کدام گزینه درست است؟

$$A = \{۷, \{۴, ۷\}, ۴\}$$

$$\boxed{۴} \text{ تمامی گزینه‌ها}$$

$$\boxed{۳} \{۴, ۷\} \subset A$$

$$\boxed{۲} ۴۷ \notin A$$

$$\boxed{۱} \{۴, ۷\} \in A$$

پاسخ: گزینه ۴ عضوهای مجموعه A عبارتند از: ۴, ۷, $\{۴, ۷\}$

زیرمجموعه‌های A عبارتند از:

$$\emptyset, \{۷\}, \{۴\}, \{\{۴, ۷\}\}, \{\{۴, ۷\}, ۴\}, \{\{۴, ۷\}, ۷\}, \{۴, ۷\}, \{\{۴, ۷\}, ۴, ۷\}$$

به این ترتیب تمامی گزینه‌ها صحیح است.

۲۱۹. کدام گزینه در مورد $A = \{۷, \{۴\}, \{۱۱, ۳\}\}$ صحیح نیست؟

$$\boxed{۴} ۳ \notin A$$

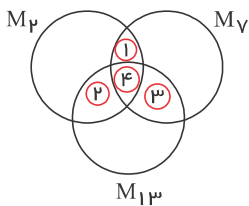
$$\boxed{۳} ۷ \in A$$

$$\boxed{۲} \{۴\} \in A$$

$$\boxed{۱} \{۱۱, ۴\} \in A$$

پاسخ: گزینه ۱ مجموعه دارای عضوی به شکل $\{۱۱, ۴\}$ نیست بلکه دارای سه عضو به شکل‌های $\{۴\}$ و $\{۱۱, ۳\}$ و ۷ است.

۲۲۰. در نمودار روبه‌رو $m_۲, m_{۱۳}, m_۷$ بترتیب مجموعه‌های مضرب ۲, ۷, ۱۳ است. عدد ۳۸۱۳۸۱ در کدام نقطه قرار می‌گیرد؟



$$\boxed{۲} ۳$$

$$\boxed{۱} ۲$$

$$\boxed{۴} ۱$$

$$\boxed{۳} ۴$$

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا عدد ۳۸۱۳۸۱ را تجزیه می‌کنیم:

۳۸۱۳۸۱	۳
۱۲۷۱۲۷	۷
۱۸۱۶۱	۱۱
۱۶۵۱	۱۳
۱۲۷	۱۲۷
۱	

$$\rightarrow ۳۸۱۳۸۱ = ۳ \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۳ \times ۱۲۷$$

پس مضرب ۳, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۲۷ است.

۲۲۱. اگر تمام زیرمجموعه‌های $A = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱\}$ را بنویسیم و یکی از این زیرمجموعه‌ها را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه در مجموعه

انتخاب شده حاصلضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو برابر ۷ باشد، چقدر است؟

$$\boxed{۴} \frac{۱}{۲}$$

$$\boxed{۳} \frac{۱}{۴}$$

$$\boxed{۲} \frac{۱}{۱۶}$$

$$\boxed{۱} \frac{۱}{۸}$$

پاسخ: گزینه ۲ مجموعه $A = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱\}$ و $n(A) = ۶$ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۶ عضوی برابر $۲^۶ = ۶۴$ است.

حال برای انتخاب مجموعه‌ای که حاصلضرب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو آن برابر ۷ باشد، ۱ و ۷ را به عنوان کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو مجموعه در نظر می‌گیریم (چون حاصلضرب هیچ کدام از اعداد دیگر در هم برابر ۷ نمی‌شود).

$$B = \{۱, \square, \square, ۷\}$$

و برای اینکه ۱ و ۷ بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو این مجموعه‌ها باشند، عضوهای ۳ یا ۵ می‌توانند در مجموعه قرار بگیرند یا قرار نگیرند، پس برای هر کدام دو

حالت وجود دارد: $۲ \times ۲ = ۴$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۴}{۶۴} = \frac{۱}{۱۶}$$

۲۲۲. روی ۶ کارت اعداد ۱ تا ۶ را نوشتیم و کارت‌ها را داخل کیسه‌ای ریختیم. دو کارت را به طور هم‌زمان به دلخواه بر می‌داریم، احتمال اینکه مجموع اعداد روی دو کارت بزرگ‌تر یا مساوی ۹ باشد، چند است؟

$$\frac{4}{15} \quad \text{④}$$

$$\frac{2}{15} \quad \text{③}$$

$$\frac{1}{5} \quad \text{②}$$

$$\frac{5}{18} \quad \text{①}$$

پاسخ: گزینه ۴. ۶ کارت داریم (مانند پرتاب دو تاس)، تعداد کل حالت‌ها برابر $6 \times 6 = 36$ است چون دو کارت را هم‌زمان برداشته‌ایم حالت‌هایی که دو عدد یکسان هستند را حذف می‌کنیم. $36 - 6 = 30$.
حال حالت‌هایی را که مجموع دو کارت بزرگ‌تر مساوی ۹ است، بررسی می‌کنیم.

$$9 \text{ مجموع} = \{(3, 6)(4, 5)(5, 4)(6, 3)\}$$

$$10 \text{ مجموع} = \{(4, 6)(6, 4)\}$$

$$11 \text{ مجموع} = \{(5, 6)(6, 5)\}$$

تعداد این حالت‌ها برابر ۸ است، پس داریم:

$$\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

۲۲۳. خانواده‌ای سه فرزند دارد که فرزند اول آن‌ها پسر است. در صورتی که در این خانواده فرزند چهارمی به دنیا بیاید، چقدر احتمال دارد سه فرزند بعدی هم جنس باشند؟

$$\frac{1}{4} \quad \text{④}$$

$$\frac{3}{16} \quad \text{③}$$

$$\frac{1}{8} \quad \text{②}$$

$$\frac{1}{16} \quad \text{①}$$

پاسخ: گزینه ۴. با به دنیا آمدن فرزند چهارم جنسیت فرزندان این خانواده به صورت پسر، □، □، □ می‌شود. برای بررسی این احتمال فرزند اول تأثیری ندارد (چون احتمال در مورد سه فرزند بعدی بررسی می‌شود). برای هر کدام از فرزندان دو حالت داریم: (دختر یا پسر):

$$\Rightarrow n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

در دو حالت از این ۸ حالت ممکن است، سه فرزند هم‌جنس باشند، یعنی هر سه دختر یا هر سه پسر باشند پس احتمال هم‌جنس بودن این فرزند برابر است با:

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

۲۲۴. کدام مورد همیشه درست است؟

$$\text{② در مورد هر دو مجموعه } A \text{ و } B \text{ خواهیم داشت } A - B = B - A$$

$$\text{① اگر تعداد عضوهای دو مجموعه } A \text{ و } B \text{ مساوی باشند آنگاه } A = B$$

$$\text{④ گزینه ۱ و ۳ صحیح است.}$$

$$\text{③ اگر } A \subset B \text{ و } B \subset A \text{ باشد آنگاه خواهیم داشت } A = B$$

پاسخ: گزینه ۳. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: اگر دو مجموعه مساوی باشند، حتماً باید هر دو شرایط زیر را داشته باشد و بودن یکی از شرط‌ها کافی نیست.

۱- تعداد عضوهای دو مجموعه برابر باشند.

۲- هر عضو از A با هر عضو از B برابر باشد.

پس گزینه ۱ غلط است.

گزینه ۲: در هر مورد رابطه $A - B = B - A$ برقرار نیست. مثال:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{5, 6, 7\}$$

$$A - B = \{1, 2, 3, 4\} \quad B - A = \{7\}$$

گزینه ۳: صحیح است.

۲۲۵. چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح هستند؟

- (الف) هر عدد گویا عددی طبیعی است. (ب) هر عدد حسابی عددی صحیح است.
(ج) هر عدد طبیعی عددی گویا است. (د) بعضی از عددهای صحیح طبیعی هستند.
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ موارد ب، ج، د درست هستند.

۲۲۶. نمایش مجموعه $B = \{3, 6, 9, 12\}$ با نمادهای ریاضی کدام است؟

- (۱) $B = \{x | x \in N, 3 \leq 3x < 12\}$ (۲) $B = \{3x | x \in N, 1 \leq x < 4\}$
(۳) $B = \{3x | x \in N, 3 \leq x \leq 12\}$ (۴) $B = \{3x | x \in N, 0 < x \leq 4\}$

پاسخ: گزینه ۴ مشاهده می‌شود که ۴ تا از مضارب ۳ آمده است. $(1 \times 3, 2 \times 3, 3 \times 3, 4 \times 3)$
مضارب k را به شکل kx نشان می‌دهیم، مثلاً $3x$ نشان‌دهنده مضارب ۳ و $4x$ نشان‌دهنده مضارب ۴ است.

۲۲۷. نمایش مجموعه $B = \{1, 4, 9, 16\}$ به زبان ریاضی کدام گزینه می‌باشد؟

- (۱) $B = \{x^2 | x \in R, 0 < x < 5\}$ (۲) $B = \{x | x \in N, 1 \leq x \leq 15\}$
(۳) $B = \{x^2 | x \in Z, 1 \leq x < 5\}$ (۴) $B = \{x | x \in Z, 0 < x < 17\}$

پاسخ: گزینه ۳

$$B = \{x^2 | x \in Z, 1 \leq x < 5\} \rightarrow x^2 \begin{cases} 1^2 = 1 \\ 2^2 = 4 \\ 3^2 = 9 \\ 4^2 = 16 \end{cases}$$

گزینه یک نادرست است. چون x عضو R است و بین صفر و ۵ بی‌نهایت عدد وجود دارد ولی مجموعه B یک مجموعه ۴ عضوی است. گزینه دو اعداد طبیعی بین ۱ و ۱۵ و خود ۱ و ۱۵ هم می‌باشد، تعداد عضو زیاد است. گزینه ۴ اعداد بین صفر و ۱۷ می‌باشد که تعداد اعضا زیاد است ولی B یک مجموعه ۴ عضوی است.

۲۲۸. در مجموعه $\{x | x \in N, 25^3 < x < 4^7\}$ چند عدد مربع کامل وجود دارد؟ (روبوکاپ ۱۳۸۶)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا و انتهای مجموعه را به صورت مربع کامل در می‌آوریم:

$$25^3 = (5^2)^3 = (5^3)^2 = 125^2$$

$$4^7 = (2^2)^7 = 2^{14} = (2^7)^2 = 128^2$$

پس مجموعه A شامل اعضای بین ۱۲۵ و ۱۲۸ است. پس:

$$(128 - 125) - 1 = 2$$

دو عدد 126^2 و 127^2 پاسخ مسئله هستند.

۲۲۹. مجموعه $A = \{x | x \in N, \frac{36}{x} \in N\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) شش (۲) هفت (۳) هشت (۴) نه

پاسخ: گزینه ۴ هنگامی $\frac{36}{x}$ عدد طبیعی خواهد شد که x مقسوم‌علیه ۳۶ باشد. پس A مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های ۳۶ می‌باشد. یعنی:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

۲۳۰. مجموعه $A = \{x^2 | \frac{x}{2} \in N, 2 < x < 10\}$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (۲) $\{4, 6, 9\}$ (۳) $\{9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$ (۴) $\{16, 36, 64\}$

پاسخ: گزینه ۴ برای این که $\frac{x}{2} \in N$ باشد باید x عددی زوج باشد. برای همین اعداد زوج مابین ۲ و ۱۰ را در نظر می‌گیریم: ۴ و ۶ و ۸. حال با جای‌گذاری این

$$A = \{16, 36, 64\}$$

۲۳۱. مجموعه‌ی $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 \leq 4\}$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟ (آزمون ورودی تیزهوشان و نمونه دولتی - کردستان ۹۳-۹۲)

- (۱) $\{0, 1, 2\}$ (۲) $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2\}$ (۳) $\{1, 2\}$ (۴) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

پاسخ: گزینه ۴ اعدادی مدنظر هستند که توان دوم آن‌ها از ۴ کم‌تر یا مساوی آن باشند:

$$\{0, \pm 1, \pm 2\}$$

۲۳۲. صورت دیگر مجموعه $\{x \mid \sqrt{x} \in \mathbb{N}\}$ کدام گزینه است؟

- (۱) $\{1, 4, 9, \dots\}$ (۲) $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots\}$ (۳) $\{1, 2, 3, \dots\}$ (۴) $\{1, 2^2, 3^2, \dots\}$

پاسخ: گزینه ۱ اعضای مجموعه بالا در واقع $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ و زمانی $\sqrt{x}$ عضو اعداد طبیعی می‌شود که x مجذور کامل باشد. باتوجه به گزینه‌ها گزینه ۱ نمایش‌دهنده مجذورهای کامل است.

۲۳۳. مجموعه‌ی $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 < x^2 < 15\}$ چند عضو دارد؟

- (۱) ۷ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱ اعداد به توان زوج هیچ‌گاه منفی نمی‌شوند. $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -5 < x^2 < 15\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ پس اعدادی مدنظر هستند که مربع آن‌ها کم‌تر از ۱۵ باشد، یعنی:

$$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

۲۳۴. عدد $\sqrt{25,000,000,001}$ به کدام مجموعه تعلق دارد؟

- (۱) $\{x \mid 5001 < x < 5002\}$ (۲) $\{x \mid 5002 < x < 5003\}$ (۳) $\{x \mid 4999 < x < 5000\}$ (۴) $\{x \mid 5000 < x < 5001\}$

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا و انتهای بازه‌ها را به توان ۲ می‌رسانیم. پس:

$$(4999)^2 = 24,990,001 \quad 25,000,000 < 25,000,001 < 25,010,001$$

$$(5000)^2 = 25,000,000 \Rightarrow 5000 < \sqrt{25,000,001} < 5001$$

$$(5001)^2 = 25,010,001$$

$$(5002)^2 = 25,020,004$$

۲۳۵. مجموعه‌ی $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x + 2 < 4\}$ کدام است؟

- (۱) $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ (۲) $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ (۳) $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$ (۴) $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

پاسخ: گزینه ۱

$$-3 < x + 2 < 4 \xrightarrow{-2} -5 < x < 2 \Rightarrow -5 < x < 2$$

$$B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$$

۲۳۶. باتوجه به مجموعه $A = \{x \mid -x \in \mathbb{N}\}$ کدام یک درست است؟

- (۱) $A = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ (۲) $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ (۳) $A = \{-1, -2, -3, \dots\}$ (۴) $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$

پاسخ: گزینه ۳ اعدادی که قرینه آن‌ها عدد طبیعی هستند عبارتند از $\{-1, -2, -3, \dots\}$ که گزینه ۳ می‌باشد.

۲۳۷. کدام گزینه نمایش تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی زیر است؟

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3x + 3 = 6\}$$

- (۱) $\{1\}$ (۲) $\emptyset$ (۳) $A, \emptyset$ (۴) $\{1\}, \{-1\}$

پاسخ: گزینه ۳

$$3x + 3 = 6 \Rightarrow x = 1$$

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3x + 3 = 6\} = \{1\}$$

پس A تنها دو زیرمجموعه دارد. $\emptyset, A = \{1\}$

۲۳۸. کدام مجموعه زیر با مجموعه $B = \{2k + 1 | k \in \mathbb{Z}\}$ برابر است با:

$\{2k - 1 | k \in \mathbb{N}\}$ (۲)

$\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ (۱)

$\{\dots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots\}$ (۴)

مجموعه اعداد صحیح بخش پذیر بر ۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

:

$k = -2 \Rightarrow 2k + 1 = -3$

$k = -1 \Rightarrow 2k + 1 = -1$

$\Rightarrow B = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$

$k = 0 \Rightarrow 2k + 1 = 1$

$k = 1 \Rightarrow 2k + 1 = 3$

:

(توجه: گزینه های (۱) و (۲) با هم برابر هستند)

۲۳۹. اگر $A = \{-x^2 + 1 | x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 3\}$ و $B = \{-x^3 | x \in A\}$ باشد، کدام گزینه عضوهای مجموعه B را نشان می دهد؟

$\{-8, -1, 0, 1, 8\}$ (۴)

$\{-1, 0, 27\}$ (۳)

$\{-3, 1, 0\}$ (۲)

$\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

$A = \{-x^2 + 1 | x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 3\}$

$= \{-(-2)^2 + 1, -(-1)^2 + 1, (0)^2 + 1, -1^2 + 1, -2^2 + 1\}$

$= \{-4 + 1, -1 + 1, 0 + 1, -1 + 1, -4 + 1\} = \{-3, 0, 1\}$

$B = \{-x^3 | x \in A\} = \{-(-3)^3, -0^3, -1^3\} = \{+27, 0, -1\}$

توجه: می دانیم: $-2^2 = 4$ اما $-2^3 = -8$

۲۴۰. باتوجه به مجموعه $K = \{a, b, c, d\}$ کدام گزینه صحیح است؟

$K \subseteq \emptyset$ (۴)

$\{b\} \subseteq K$ (۳)

$\emptyset \in K$ (۲)

$\{a\} \in K$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ چون $b \in K$ عضو K است در نتیجه $\{b\} \subseteq K$ (زیرمجموعه K) است.

۲۴۱. دو تاس را پرتاب می کنیم. با کدام احتمال حداقل یکبار عدد ۳ ظاهر می شود؟

$\frac{12}{36}$ (۴)

$\frac{11}{36}$ (۳)

$\frac{10}{36}$ (۲)

$\frac{9}{36}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ تعداد حالت های ممکن در پرتاب دو تاس را در جدول زیر نمایش می دهیم و خانه های رنگی برابر تعداد حالت های مطلوب این مسئله است.

(۱, ۱)	(۱, ۲)	(۱, ۳)	(۱, ۴)	(۱, ۵)	(۱, ۶)
(۲, ۱)	(۲, ۲)	(۲, ۳)	(۲, ۴)	(۲, ۵)	(۲, ۶)
(۳, ۱)	(۳, ۲)	(۳, ۳)	(۳, ۴)	(۳, ۵)	(۳, ۶)
(۴, ۱)	(۴, ۲)	(۴, ۳)	(۴, ۴)	(۴, ۵)	(۴, ۶)
(۵, ۱)	(۵, ۲)	(۵, ۳)	(۵, ۴)	(۵, ۵)	(۵, ۶)
(۶, ۱)	(۶, ۲)	(۶, ۳)	(۶, ۴)	(۶, ۵)	(۶, ۶)

$n(A) = 11$

$n(S) = 36$

$\Rightarrow P(A) = \frac{11}{36}$

۲۴۲. با ارقام ۱ تا ۶، عدد ۶ رقمی نوشته ایم. احتمال آنکه عدد حاصل بر ۶ بخش پذیر باشد، کدام است؟

$\frac{5}{6}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ وقتی اعداد را به دسته های ۶ تایی تقسیم کنیم، از هر ۶ عدد فقط یکی از آن ها به ۶ بخش پذیر است.

۲۴۳. هر دانش‌آموزی مریض یا سالم است. فرض کنید که اگر دانش‌آموزی امروز سالم باشد، فردا احتمال سالم بودن او ۹۵٪ است و اگر دانش‌آموزی امروز مریض باشد، فردا احتمال مریض بودن او ۵۵٪ است. اگر امروز ۲۰٪ دانش‌آموزان بیمار باشند، چند درصد دانش‌آموزان فردا بیمار خواهند بود؟

- (۱) ۱۱٪ (۲) ۱۵٪ (۳) ۵۰٪ (۴) ۵۵٪

پاسخ: گزینه ۱

درصد دانش‌آموزان سالم $100\% - 20\% = 80\%$

$$= 100\% - 95\% = 5\% \rightarrow \frac{80}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{4}{100} = 4\%$$

احتمال بیماری دانش‌آموزان سالم:

$$100\% - 20\% = 80\%, 100\% - 95\% = 5\%$$

$$\frac{80}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{4}{100} = 4\% \quad \text{فردا به احتمال } 4\% \text{ دانش‌آموزان سالم بیمار می‌شوند}$$

$$\frac{20}{100} \times \frac{55}{100} = \frac{11}{100} = 11\% \quad \text{فردا به احتمال } 11\% \text{ دانش‌آموزان بیمار، بیمار هستند}$$

$$4\% + 11\% = 15\% \quad \text{فردا } 15\% \text{ دانش‌آموزان بیمار خواهند بود}$$

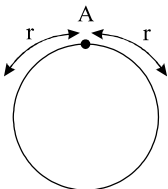
۲۴۴. نقطه ثابت A و نقطه دلخواه B را روی دایره‌ای در نظر می‌گیریم. احتمال آن که طول قوس AB کمتر از شعاع دایره باشد کدام است؟

(المپیادهای ریاضی بلژیک، فرانسه و هلند - ۱۳۷۹)

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{\pi}$ (۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{احتمال آنکه طول قوس } AB \text{ کمتر از شعاع دایره } (r) \text{ باشد.} = \frac{2r}{2\pi r} = \frac{1}{\pi}$$



۲۴۵. پنج مشتری هر یک مقادیر مختلفی را به یک شرکت پرداخت کردند. یک حسابدار بی دقت به طور دلخواه نام اشخاص را روی پاکت‌ها نوشت. یک منشی خواب‌آلود فاکتورها را داخل پاکت‌هایی گذاشت و آدرس‌ها را به طور دلخواه نوشت. یک تحصیل‌دار تنبل نامه‌ها را به دلخواه درون صندوق‌های نامه مشتریان انداخت. احتمال آنکه به هر مشتری فاکتور خودش برسد کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ (۳) $\frac{1}{5!}$ (۴) $\left(\frac{1}{5!}\right)^3$

پاسخ: گزینه ۴ حسابدار بی دقت، منشی خواب‌آلود و تحصیل‌دار تنبل هر کدام به تعداد ۵! حالت ممکن است کار خود را انجام دهند.

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$$

احتمال آنکه هر یک از سه نفر فوق، کار خود را درست انجام دهند برابر است با: $\frac{1}{5!}$

در نتیجه احتمال آنکه به هر مشتری فاکتور خودش برسد برابر است با:

$$\frac{1}{5!} \times \frac{1}{5!} \times \frac{1}{5!} = \left(\frac{1}{5!}\right)^3$$

۲۴۶. اگر P_1 احتمال ظاهر شدن عدد ۶ در پرتاب یک تاس و P_2 احتمال ظاهر شدن دقیقاً یک عدد ۶ در پرتاب دو تاس و P_3 احتمال ظاهر شدن دو عدد ۶ در پرتاب سه تاس باشد، کدام رابطه درست است؟ (المپیادهای ریاضی بلژیک، فرانسه و هلند - ۱۳۸۱)

- (۱) $P_1 < P_2 < P_3$ (۲) $P_3 < P_1 < P_2$ (۳) $P_2 < P_1 < P_3$ (۴) $P_2 < P_3 < P_1$

پاسخ: گزینه ۲

$$P_1 = \frac{1}{6} = \frac{36}{216}$$

$$P_2 = \frac{10}{36} = \frac{60}{216} = \left\{ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6) \right\}$$

$$P_3 = \frac{15}{216} \left\{ (6,6,1), (6,6,2), (6,6,3), (6,6,4), (6,6,5), (6,1,6), (6,2,6), (6,3,6), (6,4,6), (6,5,6), (1,6,6), (2,6,6), (3,6,6), (4,6,6), (5,6,6) \right\}$$

۲۴۷. با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ به طور تصادفی عددی پنج رقمی نوشته‌ایم. احتمال آن که آن عدد بر ۶ بخش پذیر باشد کدام است؟ (المپیادهای ریاضی بلژیک، فرانسه و هلند - ۱۳۸۲)

۶۰% (۴)

۴۰% (۳)

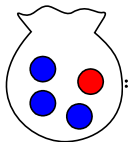
۳۳,۳۳% (۲)

۱۶,۶۶% (۱)

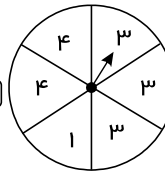
پاسخ: گزینه ۱ وقتی اعداد را به دسته‌های ۶ تایی تقسیم کنیم، از هر ۶ عدد فقط یکی از آن‌ها به ۶ بخش پذیر است.

$$\frac{1}{6} = 16,66\%$$

۲۴۸. کدام یک از پیشامدهای زیر هم‌شانس هستند؟



(۲) بیرون آمدن مهره قرمز و بیرون آمدن مهره آبی از کیسه روبه‌رو:



(۱) ایستادن عقربه چرخنده روبه‌رو روی ۳ و ایستادن آن روی ۱:

(۴) رو شدن عدد فرد و رو شدن عدد ۶ در پرتاب یک تاس سالم

(۳) رو آمدن و پشت آمدن در پرتاب یک سکه

پاسخ: گزینه ۳ گزینه (۱) شانس ایستادن عقربه روی عدد ۳ بیش‌تر از شانس ایستادن آن روی عدد ۱ است.

گزینه (۲) شانس بیرون آمدن مهره آبی بیش‌تر از شانس بیرون آمدن مهره قرمز از کیسه است.

گزینه (۴) شانس رو شدن عدد فرد (یعنی عددهای ۱، ۳ یا ۵) در پرتاب تاس بیش‌تر از شانس رو شدن عدد ۶ است.

گزینه (۳) شانس رو آمدن و پشت آمدن در پرتاب یک سکه با هم برابر است.

۲۴۹. کارت‌های زیر را داخل جعبه‌ای قرار می‌دهیم؛ احتمال بیرون آمدن عدد ۳ از جعبه کدام است؟

۵ ۱ ۱ ۳ ۳ ۳ ۴ ۶

$\frac{3}{8}$ (۴)

$\frac{1}{5}$ (۳)

$\frac{3}{5}$ (۲)

$\frac{1}{8}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ تعداد کل کارت‌ها هشت تا است و تعداد حالت‌های مطلوب (یعنی خارج شدن عدد ۳) برابر ۳ تا است. پس:

$$\text{احتمال بیرون آمدن ۳} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت‌ها}} = \frac{3}{8}$$

۲۵۰. خانواده‌ای دارای سه فرزند است، چقدر احتمال دارد هر سه فرزند آن‌ها پسر باشد؟

$\frac{2}{8}$ (۴)

$\frac{1}{8}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ همه حالت‌های ممکن را می‌نویسیم:

$$S = \{(پ,پ,پ), (پ,پ,د), (پ,د,پ), (پ,د,د), (د,پ,پ), (د,پ,د), (د,د,پ), (د,د,د)\}$$

بنابراین: $n(S) = 8$

تنها حالت مطلوب (پ,پ,پ) است.

$$A = \{(پ,پ,پ)\}$$

$$n(A) = 1$$

$$\text{بنابراین احتمال اینکه هر سه فرزند خانواده پسر باشد برابر است با: } \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{8}$$

۲۵۱. در پرتاب یک تاس احتمال آمدن عدد اول، احتمال رو شدن مضرب‌های ۵، احتمال رو شدن عدد زوج و احتمال رو شدن عدد بیش‌تر از ۶ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

$$\textcircled{۱} \quad \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۶}, \frac{۱}{۶} \text{ صفر} \quad \textcircled{۲} \quad \frac{۴}{۶}, \frac{۱}{۶}, \frac{۳}{۶} \text{ صفر} \quad \textcircled{۳} \quad \frac{۴}{۶}, \frac{۱}{۶}, \frac{۳}{۶} \quad \textcircled{۴} \quad \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۶}, \frac{۳}{۶}$$

پاسخ: گزینه ۱

$A = \{۲, ۳, ۵\} \Rightarrow n(A) = ۳$: اعداد اول در پرتاب تاس

$B = \{۵\} \Rightarrow n(B) = ۱$: مضرب‌های ۵ در پرتاب تاس

$C = \{۲, ۴, ۶\} \Rightarrow n(C) = ۳$: عدد زوج در پرتاب تاس

$D = \{\} \Rightarrow n(D) = ۰$: عدد بیش از ۶ در پرتاب تاس

و چون کل حالت‌های پرتاب تاس برابر ۶ است، بنابراین داریم:

$$P(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$P(B) = \frac{۱}{۶}$$

$$P(C) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$P(D) = \frac{۰}{۶} = ۰$$

۲۵۲. خانمی ۱۷ دکمه در کیفش داشت. ۸ تا سبز، ۵ تا آبی و ۴ دکمه قرمز بودند. حداقل چند بار بدون نگاه کردن از کیفش دکمه بردارد تا مطمئن باشد از هر رنگ حداقل یکی دارد؟

$$\textcircled{۱} \quad ۸ \quad \textcircled{۲} \quad ۱۲ \quad \textcircled{۳} \quad ۱۴ \quad \textcircled{۴} \quad ۱۶$$

پاسخ: گزینه ۳ بدترین حالت را در نظر می‌گیریم:

۱۳ دکمه به دو رنگ مختلف = ۵ دکمه آبی + ۸ دکمه سبز

حال اگر یک دکمه قرمز بردارد، $۱۳ + ۱ = ۱۴$ دکمه به سه رنگ مختلف برداشته می‌شود که از هر رنگ حداقل یکی برداشته شده است.

۲۵۳. در یک قرعه‌کشی هفتگی ۶ عدد به طور تصادفی از مجموعه اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و... ۴۸، ۴۹ انتخاب می‌شوند. خانواده فاضلی یک بلیط قرعه‌کشی خریده است با اعداد: ۴۳، ۳۰، ۲۹، ۲۶، ۱۷، ۲. پنج عدد اول قرعه‌کشی ۴۳، ۲، ۳۰، ۲۶، ۱۷ بودند. شانس این که عدد بعدی ۲۹ باشد چقدر است؟

$$\textcircled{۱} \quad \frac{۱}{۶} \quad \textcircled{۲} \quad \frac{۱}{۳۰} \quad \textcircled{۳} \quad \frac{۱}{۴۴} \quad \textcircled{۴} \quad \frac{۱}{۴۹}$$

پاسخ: گزینه ۳ از مجموعه‌ی اعداد ۱، ۲، ۳، ۴۰۰۰، ۴۹ عدد وجود دارد که پنج تای آن‌ها انتخاب شده است پس ۴۴ عدد می‌ماند. شانس این که عدد ششم ۲۹

باشد، برابر است با: $\frac{۱}{۴۴}$

۲۵۴. از ۲۸ تی شرت رنگی داخل کمد، ۶ تا قرمزند، ۵ تای آن‌ها آبی است و بقیه سفیدند. محمد می‌خواهد برای عید نوروز چند تی‌شرت بردارد. او بدون نگاه کردن به آن‌ها حداقل چند تی‌شرت بردارد تا مطمئن باشد سه تی‌شرت هم‌رنگ برداشته است؟

$$\textcircled{۱} \quad ۴ \quad \textcircled{۲} \quad ۱۳ \quad \textcircled{۳} \quad ۱۹ \quad \textcircled{۴} \quad ۷$$

پاسخ: گزینه ۴ بدترین حالت ممکن را در نظر می‌گیریم:

$۶ = ۲$ تا سفید + ۲ تا آبی + ۲ تا قرمز

حال اگر یک تی‌شرت دیگر انتخاب کند، قطعاً سه تی‌شرت هم‌رنگ برداشته است.

۲۵۵. یازده مهره‌ای که در زیر نشان داده شده است، در کیسه‌ای ریخته و مخلوط شده‌اند. فاطمه بدون نگاه کردن به داخل کیسه یک مهره خارج می‌کند احتمال اینکه مهره خارج شده مضربی از ۳ باشد چقدر است؟

$$\textcircled{۱} \quad \frac{۱}{۱۱} \quad \textcircled{۲} \quad \frac{۱}{۳} \quad \textcircled{۳} \quad \frac{۴}{۱۱} \quad \textcircled{۴} \quad \frac{۴}{۷}$$

پاسخ: گزینه ۳ ۳، ۶، ۱۲، ۱۸ مضرب ۳ هستند.

$$\frac{\text{تعداد مضرب ۳}}{\text{کل تعداد}} = \frac{۴}{۱۱} = \text{احتمال مضرب ۳ بودن}$$

۲۵۶. مجموعه A دارای یک زیرمجموعه است. با این فرض، کدام گزینه همواره نادرست است؟

۱) $A \subset \{a\}$ ۲) $A \subset \{0, a\}$ ۳) $A \subset \{a, b, c, \dots\}$ ۴) $A \cap \{a, b\} = \{a, b\}$

پاسخ: گزینه ۴ مجموعه‌ای که فقط یک زیرمجموعه داشته باشد مجموعه تهی است و مجموعه تهی زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است.

گزینه ۴ نادرست است چون اشتراک مجموعه تهی (A) با هر مجموعه‌ای، مجموعه‌ای تهی است.

۲۵۷. اگر یک سال کیبسه ۳۶۶ روز داشته باشد احتمال آنکه ۵۳ تا یکشنبه داشته باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۵۳}{۲۶۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳۶۶}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۲}{۵۳}$

پاسخ: گزینه ۳ باقی‌مانده ۳۶۶ بر ۷ عدد ۲ است یعنی در هر سال کیبسه ۲ روز در هفته ۵۳ بار تکرار می‌شود و آن دو روز آغاز سال است پس اگر سال با شنبه یا

یکشنبه شروع شود ۵۳ تا یکشنبه داریم یعنی به احتمال $\frac{۲}{۷}$

۲۵۸. «دو مجموعه A و B را هم‌ارز می‌گویند هرگاه متناظر با هر عضو از مجموعه A ، عضوی در مجموعه B و متناظر با هر عضو از مجموعه B ، عضوی

در مجموعه A وجود داشته باشد باتوجه به تعریف فوق چند تا از عبارتهای زیر درست است؟

(a) هر دو مجموعه هم‌ارز، مساوی هستند.

(b) اگر $n(A) = n(B)$ آنگاه دو مجموعه A و B هم‌ارز هستند.

(c) اشتراک هر دو مجموعه هم‌ارز، تهی است.

(d) اگر $A - B = \emptyset$ آنگاه دو مجموعه A و B هم‌ارز هستند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ تعریف: دو مجموعه A و B هم‌ارز هستند هرگاه تعداد اعضایشان با هم برابر باشد یعنی $n(A) = n(B)$.

باتوجه به تعریف بالا فقط b صحیح است.

۲۵۹. اگر $A \cap B = A$ و $C \subseteq A$ باشد حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$(A - B) \cup (C \cup B)$$

۱) B ۲) C ۳) $\{\}$ ۴) $C \cup A$

پاسخ: گزینه ۱

$$\left. \begin{matrix} A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B \\ C \subseteq A \end{matrix} \right\} \Rightarrow C \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \quad (۱)$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset \quad (۲)$$

$$\Rightarrow (A - B) \cup (C \cup B) \xrightarrow{(۱), (۲)} \emptyset \cup B = B$$

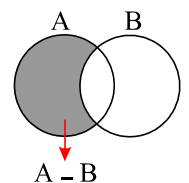
۲۶۰. اگر $n(A \cup B) = ۹$ ، $n(A \cap B) = ۴$ ، $n(A - B) = ۲$ باشد حاصل $n(B - A)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۲

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$۲ = n(A) - ۴ \Rightarrow n(A) = ۶$$



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$۹ = ۶ + n(B) - ۴ \Rightarrow n(B) = ۷$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(B - A) = 7 - 4 = 3 \Rightarrow n(B - A) = 3$$

۲۶۱. تینا در حال نوشتن اعداد ۵ رقمی است او فقط از ۲ رقم ۲ و ۴ استفاده می کند برای مثال ۲۲۴۴۲ را نوشته است. او می خواهد رقم سمت چپ ۴ نباشد. با این شرط به چند شکل مختلف می تواند اعداد ۵ رقمی بنویسد؟

۸ (۴)

۲۰ (۳)

۲۴ (۲)

۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\underline{2} \underline{2}, \underline{4} \underline{2}, \underline{4} \underline{2}, \underline{4} \underline{2}, \underline{4} \underline{2} \rightarrow \boxed{1} \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

تنها یک حالت دارد و آن ۲ است

۲۶۲. اگر $A = \{2k | k \in \mathbb{N}, k < 10\}$ و $B = \{3k - 1 | k \in \mathbb{N}, k \leq 5\}$ آنگاه مجموعه $A - (A \cap B)$ کدام است؟

$\{2, 4, 6, 8, 10\}$ (۴)

$\{4, 6, 10, 12, 16, 18\}$ (۳)

$\{5, 11\}$ (۲)

$\{2, 8, 14\}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا دو مجموعه A و B را با اعضایش می نویسیم:

$$A = \{2k | k \in \mathbb{N}, k < 10\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$$

$$B = \{3k - 1 | k \in \mathbb{N}, k \leq 5\} = \{2, 5, 8, 11, 14\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{2, 8, 14\} \Rightarrow A - (A \cap B) = \{4, 6, 10, 12, 16, 18\}$$

۲۶۳. اگر C و D دو مجموعه باشند، کدام گزینه همواره صحیح است؟

$(C \cup D) \subseteq (C \cap D)$ (۴)

اگر $a \in (C \cup D)$ آنگاه $a \in C$ (۲) اگر $a \in (C \cap D)$ آنگاه $a \in C$ (۳) $C \subseteq (C \cup D)$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ برای دو مجموعه C و D همواره $D \subseteq (C \cup D), C \subseteq (C \cup D)$

۲۶۴. در مورد دو مجموعه دلخواه A و B کدام عبارت همواره صحیح است؟

$A \cup B \subseteq A \cap B$ (۲)

$B \subseteq A \cap B, A \subseteq A \cap B$ (۱)

$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ (۴)

$A \cup B \subseteq (A - B) \cup (B - A)$ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

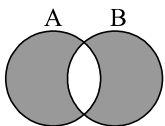
$A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$

برای هر دو مجموعه دلخواه A و B می دانیم:

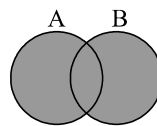
$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

یعنی اشتراک آن ها همواره زیرمجموعه هر کدام از مجموعه ها همواره زیرمجموعه اجتماع آن هاست.

هم چنین از روی نمودار و ن داریم: $(A - B) \cup (B - A) \subseteq A \cup B$



$(A - B) \cup (B - A)$



$A \cup B$

۲۶۵. هر وجه تاسی را با یکی از رنگ های آبی و قرمز رنگ کرده ایم چند تاس دو رنگ متمایز می توانیم بسازیم؟

۳۶ (۴)

۴۸ (۳)

۶۲ (۲)

۶۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ هر وجه را به ۲ طریق رنگ می کنیم پس $2^6 = 64$ حالت داریم که باید از آن ها دو حالت را کنار بگذاریم (که تاس فقط با یک رنگ آبی یا قرمز، رنگ شده است)

تعداد حالات مطلوب: $64 - 2 = 62$

۲۶۶. تاس تصمیم من را در ۳ وضع "بله" "نه" "شاید" قرار می دهد احتمال اینکه تاس "بله" بیاید چقدر است؟

$\frac{5}{6}$ (۴)

$\frac{5}{9}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ دو وجه از شش وجه تاس باید بله باشد، پس $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

۲۶۷. اگر خانواده‌ای دارای سه فرزند باشد، چه قدر احتمال دارد این خانواده دارای دقیقاً دو پسر باشد؟ (کاشان - خرداد ۹۵)

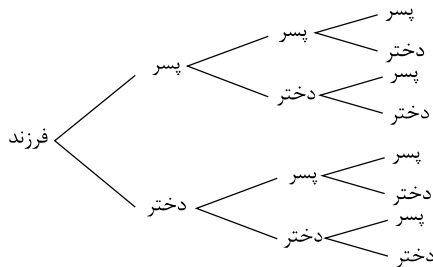
$\frac{1}{7}$ (۴)

$\frac{5}{8}$ (۳)

$\frac{1}{8}$ (۲)

$\frac{3}{8}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا کل حالت‌های ممکن را می‌نویسیم:



$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$

سپس حالت‌هایی را در نظر می‌گیریم که دقیقاً دو پسر باشد:

$A = \{(\text{دختر، پسر، پسر}), (\text{پسر، دختر، پسر}), (\text{پسر، پسر، دختر})\}$

$\Rightarrow n(A) = 3$

در نتیجه احتمال آن برابر است با: $P(A) = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{3}{8}$

۲۶۸. مجموعه‌های $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x < 4\}$ را در نظر بگیرید. کدام عبارت صحیح است؟

$B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ (۴)

$B \subseteq A$ (۳) $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ (۲)

$A \cap B = \{1, 2, 3\}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$

$B = \{x | x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x < 4\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

بنابراین:

$A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

$A \cap B = \{1, 2, 3\}$

$A \subseteq B$

پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۲۶۹. در پرتاب یک تاس چقدر احتمال دارد که عدد رو شده مضرب ۴ باشد؟ (مرکزی - خرداد ۹۵)

۱ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{1}{6}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

در پرتاب یک تاس:

$n(S) = 6$

$A = \{4\} \Rightarrow n(A) = 1$

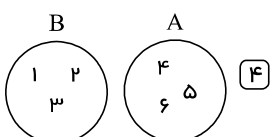
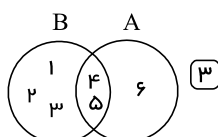
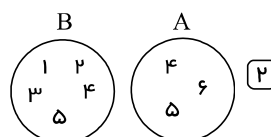
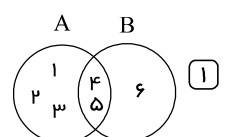
عددهای مضرب ۴ که در تاس موجود هستند:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{1}{6}$

در نتیجه احتمال آن برابر است با:

۲۷۰. دو مجموعه $A = \{4, 5, 6\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ را در نظر بگیرید.

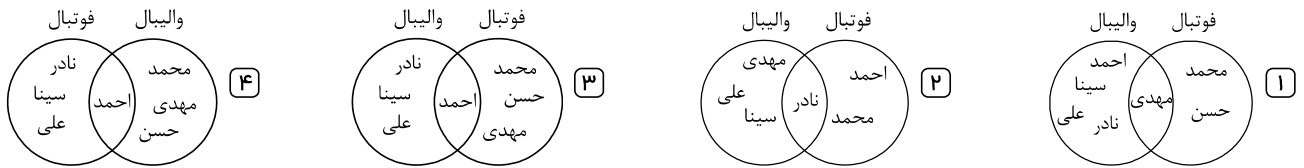
کدام نمودار ون نمایش دو مجموعه A و B است؟



پاسخ: گزینه ۳ دقت شود که در گزینه (۱) دو مجموعه A و B جابه‌جا نوشته شده است.

۲۷۱. عضویت دانش‌آموزان کلاس نهم در رشته‌های ورزشی به صورت زیر است:

محمد، حسن و مهدی در تیم فوتبال عضو هستند، سینا، نادر و علی عضو تیم والیبال هستند و احمد در هر دو رشته ثبت‌نام کرده است. نمودار و ن مربوط به عضویت دانش‌آموزان کدام است؟



پاسخ: گزینه ۳

۲۷۲. اگر خانواده‌ای دارای دو فرزند باشد، چقدر احتمال دارد این خانواده دقیقاً یک پسر داشته باشد؟ (خراسان رضوی - خرداد ۹۵)

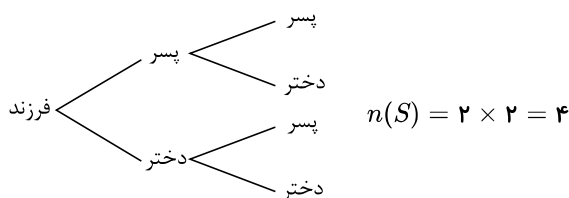
$\frac{4}{4}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{2}{4}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ تعداد کل حالت‌های ممکن به صورت زیر است:



حالت‌هایی که دقیقاً یک پسر داشته باشد:

$$A = \{(\text{پسر و دختر}), (\text{دختر و پسر})\} \Rightarrow n(A) = 2$$

در نتیجه احتمال آن برابر است با:

$$P = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۲۷۳. باتوجه به مجموعه‌ی روبرو کدام عبارت نادرست است؟ $A = \{2, \{1\}, \circ, 11\}$

$2 \in A$ (۴)

$\circ \in A$ (۳)

$11 \in A$ (۲)

$1 \in A$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ عضویت در مجموعه را با نماد ریاضی $\in$ نمایش می‌دهیم. بنابراین عبارت‌های زیر همگی صحیح‌اند:

$2 \in A$

$\{1\} \in A$

$\circ \in A$

$11 \in A$

اما $1 \notin A$ و به این معنی است که عضو ۱، در A نیست (یا ۱، عضو A نیست)

۲۷۴. مجموعه A دارای چند عضو است؟ $A = \{\{\}, \emptyset\}$

هیچ کدام (۴)

۱ عضو (۳)

هیچ عضوی ندارد (۲)

۲ عضو (۱)

پاسخ: گزینه ۳ می‌دانیم مجموعه تهی را به صورت $\emptyset$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهند. بنابراین $\{\} = \emptyset$.

باتوجه به این نکته مجموعه A را دوباره می‌نویسیم.

$$A = \{\{\}, \emptyset\}$$

$$= \{\emptyset, \emptyset\}$$

اکنون اعضای تکراری A را یکبار می‌نویسیم:

$$A = \{\emptyset\}$$

پس A دارای ۱ عضو است.

۲۷۵. کدام عبارت زیر نشان دهنده مجموعه‌ای یک عضوی است؟

- ۱) عددهای طبیعی بین ۳- و ۱-
۲) عددهای طبیعی که نه اول و نه مرکب هستند
۳) عددهای اول یک رقمی
۴) مضرب‌های صحیح ۵

پاسخ: گزینه ۲ گزینه ۱): نمایش مجموعه‌ی تهی است زیرا هیچ عدد طبیعی بین ۳- و ۱- وجود ندارد.
گزینه ۲): تنها عددی که نه اول و نه مرکب است. عدد ۱ می‌باشد پس این عبارت نشان دهنده مجموعه $\{1\}$ است.
گزینه ۳): این عبارت نمایش مجموعه $\{2, 3, 5, 7\}$ است (که یک عضوی نیست)
گزینه ۴): مجموعه مضرب‌های صحیح ۵ نیز یک عضوی نیست:

$\{5, 10, 15, \dots\}$: مضرب‌های ۵

۲۷۶. اگر دو مجموعه A و B هیچ اشتراکی نداشته باشند و تفاضل تعداد اعضایشان ۲ و مجموع تعداد زیر مجموعه‌هایشان ۴۰ باشد، $A \cup B$ چند عضو دارد؟

- ۱) ۳۲
۲) ۱۶
۳) ۸
۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳ به دلخواه $n(A) < n(B)$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} n(B) &= n(A) + 2 \\ 2^{n(B)} + 2^{n(A)} &= 40 \rightarrow 2^{n(A)+2} + 2^{n(A)} = 40 \rightarrow 2^{n(A)}(1 + 2^2) = 40 \\ \rightarrow 2^{n(A)} &= \frac{40}{5} = 8 \rightarrow 2^{n(A)} = 2^3 \rightarrow n(A) = 3 \rightarrow n(B) = 3 + 2 = 5 \\ \rightarrow n(A \cup B) &= 5 + 3 = 8 \end{aligned}$$

۲۷۷. چه تعداد از عبارت‌های زیر یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

الف) اعداد صحیح بین ۱۰۰- تا ۲۰۰

ب) پنج عدد اول دو رقمی

ج) بزرگترین شمارنده مشترک دو عدد ۱۳۹۹ و ۲۰۲۰

د) تعدادی از آدم‌های حاضر در سالن سینما

- ۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

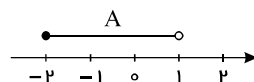
پاسخ: گزینه ۳ گزینه الف و ج یک مجموعه را مشخص می‌کنند، اما در ب و د می‌توان بیش از یک حالت اعضای مجموعه را مشخص کرد و به همین دلیل مجموعه نیستند. (اعضایش یکتا نیستند.)

۲۷۸. اگر $A = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 \leq x < 1\}$ و $B = \{x + 1 | x \in A\}$ باشد، آنگاه نمایش $A \cap B$ روی محور کدام است؟

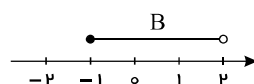


پاسخ: گزینه ۴

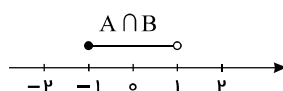
مجموعه A را روی محور نشان می‌دهیم:



مجموعه B را روی محور نشان می‌دهیم:



اشتراک دو مجموعه A و B برابر است با:



۲۷۹. اگر $A = \{x | x \in \mathbb{Z}, x^2 = x^3\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{W}, x^2 - 1 = 0\}$ باشد، کدام گزینه درست است؟

- ☐ ۱ $A \subset B$
 ☐ ۲ $B \subset A$
 ☐ ۳ $A \cap B = \emptyset$
 ☐ ۴ $A \cup B = \{-1, 0, 1\}$

پاسخ: گزینه ۲ اعضای مجموعه A و B را مشخص می‌کنیم.

$$x^2 = x^3 \rightarrow x = 0, x = 1 \rightarrow A = \{0, 1\}$$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = 1, x = -1 \xrightarrow{x \in \mathbb{W}} x = 1 \rightarrow B = \{1\}$$

با توجه به مجموعه A و B تنها گزینه ۲ درست است.

۲۸۰. در بین اعداد دو رقمی کوچکتر از ۶۰، یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم، چه قدر احتمال دارد این عدد مضرب ۲ باشد، ولی مضرب ۶ نباشد؟

- ☐ ۱ $\frac{8}{50}$
 ☐ ۲ $\frac{1}{2}$
 ☐ ۳ $\frac{17}{50}$
 ☐ ۴ $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه ۳ برای آنکه عددی مضرب ۶ باشد، باید هم مضرب ۲ و هم مضرب ۳ باشد، حال با توجه به خواسته سؤال مجموعه A اعداد زوج بین ۱۰ تا ۵۹ هستند که مضرب ۳ نباشند.

$$S = \{10, 11, \dots, 59\} \rightarrow n(S) = 50$$

در بین این ۵۰ عدد، نصف آن‌ها زوج هستند ($\frac{50}{2} = 25$) و از این ۲۵ عدد، اعداد زیر که مضرب ۳ هستند، باید حذف شوند.

$$n(A) = 25 - 8 = 17 \leftarrow \{12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{17}{50}$$

احتمال مورد نظر

۲۸۱. اگر مجموعه A و B به صورت زیر باشند، چه تعداد از عبارات‌های زیر درست است؟

$$A = \{x | x \in \mathbb{R}, x < 1\} \quad \text{و} \quad B = \{y | y \in \mathbb{R}, -1 \leq y < 2\}$$

الف) $A \cap B = \{x | x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 1\}$

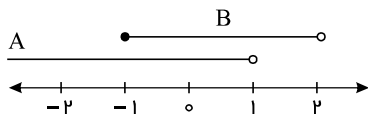
ب) $A \cup B = \{x | x < 2\}$

ج) $B \subseteq Q$

د) $1 - \sqrt{2} \in A$

- ☐ ۱
 ☐ ۲
 ☐ ۳
 ☐ ۴ صفر

پاسخ: گزینه ۲ دو مجموعه A و B را روی یک محور نمایش می‌دهیم:



با توجه به محور داریم:

گزینه ۱: $A \cap B = \{x | x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 1\}$ ✗

گزینه ۲: $A \cup B = \{x | x \in \mathbb{R}, x < 2\}$ ✓

گزینه ۳: $B \subseteq Q$ ✗

گزینه ۴: $\sqrt{2} \simeq 1,4 \rightarrow 1 - \sqrt{2} \simeq -0,4 \rightarrow 1 - \sqrt{2} \in A$ ✓

۲۸۲. اگر $A = \left\{ \frac{2x}{1-|x|} \mid x \in \mathbb{Z}, -4 < x \leq 2 \right\}$ باشد، تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو مجموعه A ، کدام است؟

- ☐ ۱
 ☐ ۲ ۶
 ☐ ۳ ۷
 ☐ ۴ ۸

پاسخ: گزینه ۴

$$A = \left\{ \frac{2x}{1-|x|} \mid x \in \mathbb{Z}, \underbrace{-4 < x \leq 2}_{x=-3, -2, -1, 0, 1, 2} \right\} = \left\{ \frac{2 \times (-3)}{1-|-3|}, \frac{2 \times (-2)}{1-|-2|}, \frac{2 \times (-1)}{1-|-1|}, \frac{2 \times 0}{1-|0|}, \frac{2 \times 1}{1-|1|}, \frac{2 \times 2}{1-|2|} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{-6}{-2}, \frac{-4}{-1}, \frac{-2}{0}, 0, \frac{2}{0}, \frac{4}{-1} \right\} = \underbrace{\{3, 4\}}_{\text{بزرگترین}}, \underbrace{\{0, -4\}}_{\text{کوچکترین}}$$

$$\text{تفاضل} = 4 - (-4) = 8$$

۲۸۳. اگر $A \subset B$ و $C' \subset B'$ آن گاه:

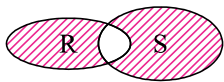
$B \subset A$ (۴)

$C \subset B$ (۳)

$C \subset A$ (۲)

$A \subset C$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ چون $C' \subset B'$ است، پس $B \subset C$ است و چون $A \subset B$ است، بنابراین $A \subset C$ خواهد شد.



۲۸۴. قسمت هاشور زده در شکل مقابل، تصویر و ن مربوط به کدام مجموعه نیست؟

$(R \cup S) \cap (S' \cup R')$ (۲)

$(R \cup S) \cap (S' \cup R')$ (۱)

$(R - S) \cap (S - R)$ (۴)

$(R - S) \cup (S - R)$ (۳)

پاسخ: گزینه ۴ قسمت هاشور خورده $R \Delta S$ می باشد که همان $(R - S) \cup (S - R)$ یا $(R \cup S) - (R \cap S)$ می باشد.

۲۸۵. حداکثر چند زیرمجموعه از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ می توان انتخاب کرد به طوری که اجتماع هیچ دو زیرمجموعه ای مساوی مجموعه A نشود؟

۸ (۴)

۹ (۳)

۱۰ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ برای اینکه اجتماع هیچ دو زیرمجموعه ای برابر A نشود لازم است که حداقل یکی از اعضای A در هیچ زیرمجموعه ای نباشد در این صورت مجموعه A سه عضوی خواهد شد و ۸ زیرمجموعه دارد که اجتماع هیچ دوتایی از آنها برابر A نیست چون حداقل آن یک عضو حذف شده را ندارد.

۲۸۶. اگر $A_k = \{k, k+1, k+2, k+3\}$ آنگاه $A_3 \cap A_4 \cap A_5$ چند عضو دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$A_3 = \{3, 4, 5, 6\}, A_4 = \{4, 5, 6, 7\}, A_5 = \{5, 6, 7, 8\} \Rightarrow A_3 \cap A_4 \cap A_5 = \{5, 6\}$$

۲۸۷. اگر $k \in \mathbb{Z}$ ، آنگاه مجموعه عددها به کدام صورت می تواند فرد باشد؟

$3k+1$ (۴)

$3k-1$ (۳)

$2k+6$ (۲)

$2k-5$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ اگر $k \in \mathbb{Z}$ باشد، $2k$ همواره زوج است و چون تفاضل یک عدد فرد و یک عدد زوج، عددی فرد است، پس مجموعه اعداد به صورت $\{2k-5 | k \in \mathbb{Z}\}$ شامل اعداد فرد است.

۲۸۸. در کشور کانادا برخی از مردم فقط به زبان انگلیسی صحبت می کنند و برخی فقط به زبان فرانسه و بقیه به هر دو زبان. یک آمارگیری نشان داده است که ۸۵٪ از مردم کانادا می توانند به انگلیسی و ۷۵٪ به فرانسوی صحبت کنند. چند درصد از مردم به هر دو زبان صحبت می کنند؟

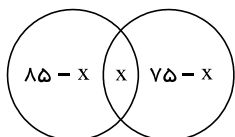
۶۰ (۴)

۲۵ (۳)

۵۷ (۲)

۴۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴



$$85 - x + x + 75 - x = 100 \Rightarrow 160 - x = 100 \Rightarrow x = 60\%$$

۲۸۹. اعضای مجموعه A کدام است؟

$$A = \{3x^{-y} - 2(-y)^{-x} | x, y \in \mathbb{Z}, xy = -2\}$$

$\{\frac{3}{4}, 1, -2, 7\}$ (۴)

$\{-1, -7, 2\}$ (۳)

$\{7, -1, 4, -\frac{7}{4}\}$ (۲)

$\{2, 4, 7, -\frac{7}{4}\}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ حالات مختلف $xy = -2$ را با فرض صحیح بودن x و y می نویسیم:

$$xy = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1, y = -2 \Rightarrow 3(1)^{-(-2)} - 2(-(-2))^{-1} = 3 - 1 = 2 \\ x = 2, y = -1 \Rightarrow 3(2)^{-(-1)} - 2(-(-1))^{-2} = 6 - 2 = 4 \\ x = -2, y = 1 \Rightarrow 3(-2)^{-1} - 2(-1)^{-(-2)} = -\frac{3}{2} - 2 = -\frac{7}{2} \\ x = -1, y = 2 \Rightarrow 3(-1)^{-2} - 2(-2)^{-(-1)} = 3 + 4 = 7 \end{cases}$$

در نتیجه اعضای A به صورت $\{2, 4, 7, -\frac{7}{2}\}$ است.

۲۹۰. مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ چند زیرمجموعه دارد به طوری که شامل عضوهای a, c و e باشند ولی عضوهای b و g را نداشته باشند؟

۱۶ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

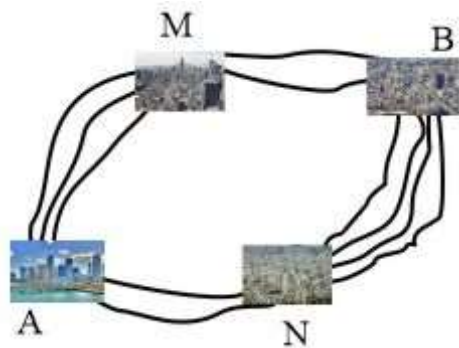
۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$2^{7-(3+2)} = 4$$

این چهار زیرمجموعه عبارتند از:

$$\{a, c, e\}, \{a, c, e, f\}, \{a, c, e, d\}, \{a, c, e, d, f\}$$



۲۹۱. به چند طریق می توان از شهر A به B رفت؟ (هیچ مسیری حق برگشت به سمت A نداریم)

مسیر شهرها را در نمودار مقابل رسم کرده ایم.

۴۸ (۱)

۲۴ (۲)

۲۰ (۳)

۱۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

دو مسیر داریم:

$$A \rightarrow M \rightarrow B : 3 \times 2 = 6$$

$$A \rightarrow N \rightarrow B : 2 \times 4 = 8$$

$$6 + 8 = 14$$

۲۹۲. اعضای مجموعه A را می توان به صورت مجموع ۴ عدد طبیعی متوالی و عضوهای مجموعه B را می توان به صورت مجموع ۵ عدد طبیعی متوالی

نوشت، $A \cap B$ کدام است؟

$$\{30k + 15 | k \in \mathbb{N}\} \quad (۴)$$

$$\{20k + 10 | k \in \mathbb{N}\} \quad (۳)$$

$$\{15k + 20 | k \in \mathbb{N}\} \quad (۲)$$

$$\{5k + 10 | k \in \mathbb{N}\} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا باید دید مجموع ۴ عدد طبیعی متوالی و مجموع ۵ عدد طبیعی متوالی چه نوع اعضایی را تشکیل می دهد؟

$$A \Rightarrow k + (k+1) + (k+2) + (k+3) = 4k + 6 = 4(k+1) + 2 = 4E + 2$$

$$B \Rightarrow K + K + 1 + K + 2 + K + 3 + K + 4 = 5K + 10 = 5(K+2) = 5F$$

اعضای مشترک می شود اعضای مضرب ۵ که باقی مانده تقسیم آن ها بر ۴ برابر ۲ است یعنی:

$$5 \times (4k + 2) = 20k + 10$$

۲۹۳. حداقل چند عضو از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 28\}$ باید حذف کنیم تا حاصل ضرب اعضای باقی مانده مربع کامل شود؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ حاصل ضرب ۱ تا ۲۸ را باید به شکل ضرب اعداد با توان های زوج بنویسیم. راه ساده تر آنکه با ضرب اعداد مناسب، توان های زوج بسازیم و کنار بگذاریم.

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 28 = 1 \times \cancel{2} \times 3 \times 4 \times \dots \times \cancel{4} \times \dots \times \cancel{28}$$

مجذور کامل‌ها را کنار هم می‌گذاریم؛ مثل ۱، ۴، ۹،

اعداد 7×3 را هم در ۲۱ ضرب کنیم 21^2 به دست می‌آید که کنار هم می‌گذاریم، 5×4 هم در ۲۰ کنار می‌رود و می‌ماند اعداد زیر:

$$27 \times 26 \times 24 \times 23 \times 22 \times 19 \times 18 \times 17 \times 15 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 8 \times 6$$

عدد ۶ به شکل 3×2 است که با 18×27 مجذور کامل می‌شوند. مجذور کامل $36 \times 81 = 3 \times 27 \times 18 \times 2$ بقیه را هم چنین می‌نویسیم:

$$= 13 \times 2 \times (3 \times 2 \times 4) \times 23 \times (11 \times 2) \times 19 \times 17 \times (3 \times 5) \times 13 \times (3 \times 4) \times 11 \times (5 \times 2) \times (2 \times 4) \times (2 \times 4)$$

$$23 \times 19 \times 17 \times 13^2 \times 11^2 \times 3^3 \times 2^{11}$$

$$2, 3, 17, 19, 23$$

پس آن‌هایی که باقی‌مانده است.

اگر این ۵ عدد حذف شوند، حاصل ضرب بقیه مجذور کامل می‌شود.

۲۹۴. مجموعه $\{6, 10, 3, 19, 21, 11\}$ را به دو زیرمجموعه ۳ عضوی افزایش می‌کنیم؛ (یعنی ۲ مجموعه‌ای که عضو مشترکی نداشته باشند)، سپس

حاصل جمع هر سه عضو هر زیرمجموعه را حساب کرده، دو عدد حاصل را در هم ضرب می‌کنیم، عدد نهایی حداکثر برابر است با:

$$\boxed{4} \quad 1161$$

$$\boxed{3} \quad 1425$$

$$\boxed{2} \quad 1225$$

$$\boxed{1} \quad 1200$$

پاسخ: گزینه ۲ هر چه دو عدد نهایی نزدیک‌تر باشند ضرب آن‌ها بزرگ‌تر می‌شود!

برای این کار جمع کل ۶ عضو را حساب می‌کنیم:

$$11 + 21 + 19 + 3 + 10 + 6 = 70$$

$$70 \div 2 = 35 \rightarrow \text{جمع هر ۳ عدد}$$

ترجیحاً جمع هر ۳ عدد باید ۳۵ شود؛

$$3 + 11 + 21 = 35$$

$$6 + 10 + 19 = 35$$

$$35 \times 35 = 1225$$

۲۹۵. دو مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ و $B = \{m, n, a, d, k, f\}$ مفروضند. چند زیرمجموعه از A یافت می‌شود که زیرمجموعه B نیز

باشد؟

$$\boxed{4} \quad 8$$

$$\boxed{3} \quad 6$$

$$\boxed{2} \quad 4$$

$$\boxed{1} \quad 2$$

پاسخ: گزینه ۴ اعضای مشترک A و B عبارتند از a, d, f ؛ یعنی ۳ عضو. با این ۳ عضو هم، ۸ زیرمجموعه می‌توان نوشت.