برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: پاسخ سوالات ف۸ ۹ام

۱. اگر قطر کره‌ای را ۲ برابر کنیم، آنگاه به حجم اولیه‌ی آن چقدر افزوده می‌شود؟

۱) ۸ برابر حجم اولیه ۲) ۷ برابر حجم اولیه ۳) ۴ برابر حجم اولیه ۴) ۳ برابر حجم اولیه

پاسخ: گزینه ۲ اگر قطر کره دو برابر شود، شعاع نیز دو برابر شده و حجم که با $\frac{۴}{۳}\pi r^۳$ محاسبه می‌شود، (چون توان سوم شعاع ظاهر شده) ۸ برابر می‌شود، یعنی ۷ برابر به حجم اولیه افزوده می‌شود.

$$\text{اولیه } V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳$$
$$\text{ثانویه } V=\frac{۴}{۳}\pi(۲r)^۳=\frac{۴}{۳}\pi(۸r^۳) \rightarrow \text{ثانویه} - \text{اولیه} \quad V=۸(\frac{۴}{۳}\pi r^۳)-\frac{۴}{۳}\pi r^۳=۷(\frac{۴}{۳}\pi r^۳)$$

۲. حجم نیم‌کره‌ای به شعاع R از کدام دستور به دست می‌آید؟

۱) $۲\pi R^۲$ ۲) $۴\pi R^۲$ ۳) $\frac{۴}{۳}\pi R^۳$ ۴) $\frac{۲}{۳}\pi R^۳$

پاسخ: گزینه ۴ حجم کره از رابطهٔ $\frac{۴}{۳}\pi R^۳$ به دست می‌آید، پس حجم نیم‌کره برابر می‌شود با:

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\frac{۲}{۳}\pi R^۳$$

۳. مجموعه نقاطی از فضا که فاصله‌ی همه‌ی آن‌ها از یک نقطه به نام مرکز برابر باشند را ..... گویند.

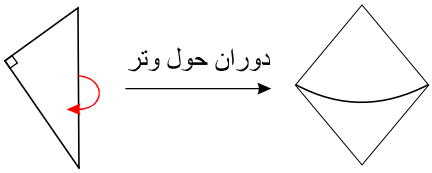
۱) کره ۲) دایره ۳) نیم‌کره ۴) مخروط

پاسخ: گزینه ۱

۴. از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن چه شکلی پدید می‌آید؟

۱) یک مخروط ۲) دو مخروط با قاعده‌ی مشترک ۳) یک کره و یک مخروط با شعاع مشترک ۴) یک مخروط و یک هرم

پاسخ: گزینه ۲



۵. حجم هرمی با قاعدهٔ لوزی به قطرهای ۳ و ۴ و ارتفاع ۵ چه‌قدر است؟

۱) ۶۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{حجم هرم}=\frac{۱}{۳}\times\text{مساحت قاعده}\times\text{ارتفاع}=\frac{۱}{۳}\times\frac{۳\times۴}{۲}\times۵=۱۰$$

$$\text{مساحت لوزی}=\frac{\text{حاصلضرب دو قطر}}{۲}$$

۶. مساحت کره‌ای $۱۱/۵۶\pi$ سانتی‌متر مربع است. قطر کره چند سانتی‌متر است؟

۱) $۱/۷cm$ ۲) $۳/۴cm$ ۳) $۶/۸cm$ ۴) $۲/۸۹cm$

پاسخ: گزینه ۲

$$\text{کره } S=۴\pi r^۲ \quad ۴\pi r^۲=۱۱/۵۶\pi \rightarrow r^۲=\frac{۱۱/۵۶}{۴}=۲/۸۹ \rightarrow \text{شعاع } r=۱/۷ \rightarrow \text{قطر}=۱/۷\times۲=۳/۴\,cm$$

۷. وجوه جانبی هر هرم به شکل ..... است. (هرمزگان – خرداد ۹۵)

۱) مثلث ۲) مستطیل ۳) مربع ۴) متوازی‌الاضلاع

پاسخ: گزینه ۱

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۸. حجم هرم مربع‌القاعده‌ای به اضلاع قاعده‌ی a و ارتفاع b کدام است؟ (یزد – خرداد ۹۵)

۱) $\frac{۱}{۳}ab^۲$ ۲) $\frac{۱}{۳}a^۲b$ ۳) $\frac{ab}{۳}$ ۴) $\frac{a^۲b^۳}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲

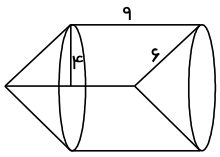
$$\frac{۱}{۳}a^۲b$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

۹. اگر یک متوازی‌الاضلاع به ضلع‌های ۹ و ۶ سانتی‌متر و ارتفاع ۴ سانتی‌متر را حول ضلع بزرگ‌تر دوران دهیم، حجم حاصل از دوران چند سانتی‌متر مکعب است؟

۱) ۷۲π ۲) ۱۰۸π ۳) ۱۴۴π ۴) ۳۲۴π

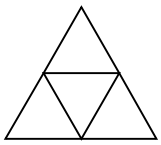
پاسخ: گزینه ۳



اگر مخروط برآمده را در قسمت فرو رفته قرار دهیم، استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۹ خواهیم داشت، پس کافیست حجم استوانهٔ حاصل را بدست آوریم:

استوانه $V = \pi r^۲ h = \pi(۴)^۲ \times ۹ = ۱۴۴\pi$

۱۰. با سطحِ مثلث شکلی، به ضلع $۲۰\ cm$ یک چهاروجهی منتظم ساخته‌ایم. مساحت جانبی آن کدام است؟



۱) $۱۰۰\sqrt{۳}$ ۲) $۲۵\sqrt{۳}$
۳) $۵۰\sqrt{۳}$ ۴) $۷۵\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۴ مساحت جانبی این چهاروجهی منتظم از ۳ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱۰ ساخته می‌شود. پس ابتدا مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱۰ را محاسبه می‌کنیم.

نکته: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است.

پس مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱۰ برابر می‌شود با:

$$\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۱۰^۲\sqrt{۳}}{۴} = ۲۵\sqrt{۳}$$

حال مساحت ۳ مثلث متساوی‌الاضلاع را به دست می‌آوریم:

$$۲۵\sqrt{۳} \times ۳ = ۷۵\sqrt{۳}$$

۱۱. شعاع قاعده‌ی یک مخروط، با شعاع قاعده‌ی یک استوانه برابر است. اگر ارتفاع استوانه نصف ارتفاع مخروط باشد، نسبت حجم استوانه به حجم مخروط برابر است با:

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

شعاع قاعده استوانه = شعاع قاعده مخروط $= R$

ارتفاع مخروط $= ۲h \rightarrow$ ارتفاع استوانه $= h$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi R^۲ h \ , \ V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ (۲h) = \frac{۲}{۳}\pi R^۲ h$$

$$\rightarrow \frac{V_{\text{استوانه}}}{V_{\text{مخروط}}} = \frac{\pi R^۲ h}{\frac{۲}{۳}\pi R^۲ h} = \frac{۱}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۳}{۲}$$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۱۲. اگر شعاع کره‌ای را سه برابر کنیم، حجم کره‌ی حاصل چند برابر می‌شود؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۸۱ ۴) ۲۷

پاسخ: گزینه ۴

حجم کره باتوان سوم شعاع رابطه دارد. اگر شعاع ۳ برابر شود حجم ^{۳} ۳ برابر می‌شود.

$$\text{حجم کره} = \frac{۴}{۳}\pi \; r^{۳} \downarrow (۳r)^{۳} \downarrow (۲۷r^{۳})$$

$$V_۱ = \frac{۴}{۳}\pi r_۳ \to V_۲ = \frac{۴}{۳}\pi(۳r)^{۳} \Rightarrow V_۲ = \frac{۴}{۳}\pi \times ۲۷r^{۳} \Rightarrow \frac{V_۲}{V_۱} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi \times ۲۷r^{۳}}{\frac{۴}{۳}\pi \times r^{۳}} = ۲۷$$

۱۳. مکعبی به قطر $\sqrt{۱۲}$ را درون استوانه‌ای محاط کرده‌ایم. حجم استوانه کدام است؟

۱) ۱۶π ۲) $\sqrt{۲}\pi$ ۳) $۳\sqrt{۲}\pi$ ۴) ۴π

پاسخ: گزینه ۴ نکته: قطر مکعب به ضلع a از رابطهٔ $\sqrt{۳}a$ به دست می‌آید.

$$\Rightarrow \sqrt{۳}a = \sqrt{۱۲} \Rightarrow a = \sqrt{۴} = ۲$$

ضلع مکعب محاط شده در درون استوانه برابر ۲ است.

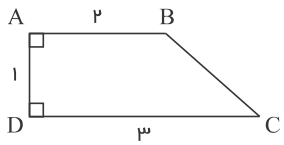
در نتیجه قطر قاعدهٔ این استوانه برابر قطر مربّع (وجه بالایی مکعب) است.

$$\text{قطر مربّع} = ۲\sqrt{۲} = \text{قطر قاعدهٔ استوانه} \Rightarrow \text{شعاع قاعدهٔ استوانه} = \sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow a = ۲$$

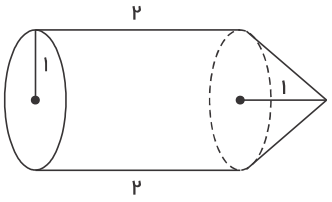
$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^{۲} h = \pi(\sqrt{۲})^{۲} \times ۲ = ۴\pi$$

۱۴. حجم حاصل از دوران ذوزنقهٔ مقابل، حول ضلع DC چند سانتی‌متر مکعب است؟



۱) ۳π ۲) $\frac{۷}{۳}\pi$ ۳) $\frac{۱۳}{۳}\pi$ ۴) $\frac{۴}{۳}\pi$

پاسخ: گزینه ۲ شکل زیر از یک استوانه و یک مخروط تشکیل شده است.



$$\text{حجم شکل حاصل} = V_{\text{استوانه}} + V_{\text{مخروط}} =$$

$$\pi(۱)^{۲} \times ۲ + \frac{۱}{۳}\pi(۱)^{۲} \times ۱ = ۲\pi + \frac{۱}{۳}\pi = \frac{۷}{۳}\pi$$

۱۵. چند جمله از جمله‌های زیر نادرست است؟

- حجم کره‌ای به شعاع ۳ برابر است با ۳۶π
- از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول وتر، یک مخروط به وجود می‌آید.
- چهاروجهی منتظم دارای ۶ یال است.
- مساحت جانبی استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع r برابر است با $۲\pi r^{۲}$.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴ عبارت اول صحیح است. چرا که داریم:

$$\text{کره با شعاع ۳ } V = \frac{۴}{۳}\pi(۳)^{۳} = \frac{۴\pi \times ۲۷}{۳} = ۳۶\pi$$

عبارت دوم نادرست است؛ چرا که از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر دو مخروط ایجاد می‌شود.

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

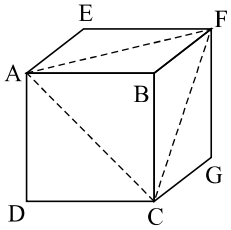
برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

عبارت سوم نیز صحیح است؛ چرا که یک چهاروجهی منتظم دارای ۶ یال است.

عبارت چهارم صحیح است؛ چرا که داریم:

S جانبی استوانه به شعاع r و ارتفاع r $= \text{محیط قاعده} \times \text{ارتفاع} = ۲\pi r \times r = ۲\pi r^۲$

۱۶. مطابق شکل روبه‌رو از مکعبی به طول ضلع یک با رأس‌های H ، G ، F ، E ، D ، C ، B ، A هرم $AFCB$ را بریده‌ایم. به همین ترتیب هرم‌های $EAFH$ و $GFCH$ و $DACH$ را می‌بریم. حجم شکل باقی‌مانده کدام است؟



۱) صفر
۲) $\frac{۱}{۳}$
۳) $\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۵}$

پاسخ: گزینه ۲ تمامی هرم‌ها متمایزند. حجم یکی از آن‌ها برابر است با:

$$\frac{\frac{۱}{۲} \times ۱}{۳} = \frac{۱}{۶}$$

بنابراین میزان حجم باقی‌مانده برابر است با:

$$۱ - \frac{۴}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

۱۷. مساحت جانبی و حجم یک منشور با قاعدهٔ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ و ارتفاع ۳ به ترتیب برابر کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۳}$ ،۱۲
۲) $۱۲\sqrt{۳}$ ،۱۲
۳) $۳\sqrt{۳}$ ،۳۶
۴) $۱۲\sqrt{۳}$ ،۳۶

پاسخ: گزینه ۴ حجم منشور برابر است با مساحت مربعی به ضلع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است. مساحت قاعده در ارتفاع، داریم:

$$\text{مساحت قاعده} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴ \times ۴}{۲} = ۴\sqrt{۳} \rightarrow \text{حجم منشور } V = ۳ \times ۴\sqrt{۳} = ۱۲\sqrt{۳}$$

مساحت جانبی هم برابر است با: محیط قاعده $\times$ ارتفاع.

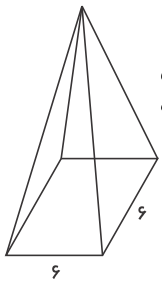
$$۳ \times (۴ \times ۳) = ۳۶$$

۱۸. مساحت کل یک هرم منتظم $۹۶cm^۲$ است. اگر قاعدهٔ این هرم مربعی به ضلع $۶cm$ باشد، اندازهٔ ارتفاع هرم چند سانتی‌متر است؟

۱) $۳cm$
۲) $۴cm$
۳) $۵cm$
۴) $۶cm$

پاسخ: گزینه ۲

باتوجّه به اینکه مساحت کل هرم منتظم با قاعدهٔ مربع از مساحت یک مربع و چهار مثلث متساوی‌الساقین تشکیل شده است، پس:



مساحت کل هرم منتظم با قاعدهٔ مربع = مساحت قاعدهٔ مربع $+۴\times$ مساحت مثلث‌ها

$$۹۶ = ۶ \times ۶ + ۴\underbrace{S}_{\text{مساحت مثلث}} \Rightarrow ۹۶ - ۳۶ = ۴S \Rightarrow ۶۰ = ۴S \Rightarrow S = ۱۵$$

مساحت یک مثلث برابر ۱۵ ، حال ارتفاع مثلث وجه جانبی را به دست می‌آوریم.

$$\text{مساحت} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲} = \frac{۶h}{۲} = ۱۵ \Rightarrow h = ۵$$

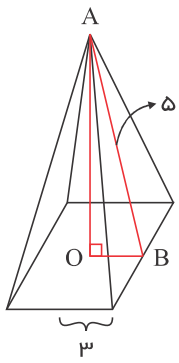
حال برای مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB داریم:

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

$$AO^۲ + OB^۲ = AB^۲$$
$$\Rightarrow AO^۲ + ۳^۲ = ۲۵$$
$$\Rightarrow AO^۲ = ۱۶ \Rightarrow AO = ۴$$

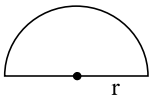
AO در واقع ارتفاع هرم است.



۱۹. یک نیم‌دایره را به شکل یک قیف مخروطی شکل در می‌آوریم (برای این کار، دو شعاع نیم‌دایره را که در امتداد هم هستند، بر هم منطبق می‌کنیم). زاویهٔ رأس این مخروط چند درجه است؟

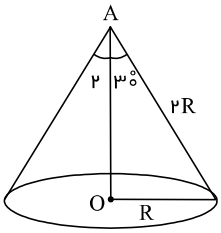
۱) ۴۵ ۲) ۶۰ ۳) ۳۰ ۴) بستگی به شعاع نیم‌دایره دارد.

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا محیط نیم‌دایره را محاسبه می‌کنیم که برابر πr است. حال این مقدار را برای محیط قاعدهٔ مخروط (دایره به شعاع R) قرار می‌دهیم.

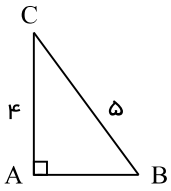


$$\pi r = ۲\pi R \Rightarrow r = ۲R$$

و باتوجّه به اینکه ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است، پس $\hat{A}_۱ = ۳۰^\circ$ در نتیجه زاویهٔ رأس مخروط برابر $۲ \times ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$ است.



۲۰. حجم حاصل از دوران مثلث زیر حول ضلع AB کدام است؟

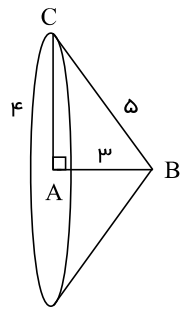


۱) ۱۰π ۲) ۱۲π
۳) ۱۶π ۴) ۲۰π

پاسخ: گزینه ۳ از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول ضع قائمش یک مخروط حاصل می‌شود.

برای اینکه ارتفاع این مخروط را به دست آوریم، از رابطهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم.

$$\overline{AB}^۲ + \overline{AC}^۲ = \overline{BC}^۲$$
$$\overline{AB}^۲ + ۴^۲ = ۵^۲$$
$$\Rightarrow \overline{AB}^۲ = ۲۵ - ۱۶ = ۹ \Rightarrow \overline{AB} = ۳$$



حال حجم مخروطی با شعاع قاعدهٔ ۴ و ارتفاع ۳ را به دست می‌آوریم:

مخروط $V = \frac{۱}{۳}sh = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi(۴)^۲(۳) = ۱۶\pi$

۲۱. حجم کره‌ای به شعاع $۲a$ با حجم مخروطی به قطر قاعدهٔ $۸a$ برابر است. نسبت ارتفاع مخروط به شعاع قاعدهٔ آن چیست؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

پاسخ: گزینه ۲ باتوجّه به اینکه حجم کره و مخروط با هم برابرند، در نتیجه:

$$\frac{V_{\text{مخروط}}}{V_{\text{کره}}}=۱\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۳}\pi r^۲h}{\frac{۴}{۳}\pi R^۳}=\frac{\frac{۱}{۳}\pi(۴a)^۲h}{\frac{۴}{۳}\pi(۲a)^۳}=\frac{\frac{۱}{۳}\pi ۱۶a^۲h}{\frac{۴}{۳}\pi ۸a^۳}=\frac{۲h}{۴a}=\frac{h}{۲a}=۱$$

$$\Rightarrow h=۲a$$

ارتفاع مخروط را به‌دست آوردیم:

حال نسبت ارتفاع مخروط به شعاع قاعدهٔ آن را به‌دست می آوریم:

$$\frac{h}{۴a}=\frac{۲a}{۴a}=\frac{۱}{۲}$$

۲۲. ارتفاع مخروطی سه برابر شعاع قاعدهٔ آن است اگر حجم مخروط ۱۲۸π باشد ارتفاع آن کدام است؟

۱) $۴\sqrt[۳]{۲}$ ۲) $۶\sqrt[۳]{۲}$ ۳) $۱۲\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $۸\sqrt[۳]{۲}$

پاسخ: گزینه ۳ فرض کنیم شعاع قاعدهٔ این مخروط برابر x باشد، در نتیجه ارتفاع این مخروط برابر می‌شود با: $h=۳x$.

حال از رابطهٔ حجم مخروط داریم:

$$V_{\text{مخروط}}=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h=\frac{۱}{۳}\pi x^۲\cdot ۳x=\pi x^۳$$

$$\pi x^۳=۱۲۸\pi\Rightarrow x^۳=۱۲۸\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۱۲۸}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۶۴\times ۲}=\sqrt[۳]{۶۴}\times\sqrt[۳]{۲}=۴\sqrt[۳]{۲}$$

حال باتوجّه به اینکه $h=۳x$ است، داریم:

$$h=۳x=۳\times ۴\sqrt[۳]{۲}=۱۲\sqrt[۳]{۲}$$

۲۳. مساحت کره‌ای ۱۰۰πاست، حجم آن .....است.

۱) $\frac{۵۰۰}{۲}\pi$ ۲) ۵۰۰π ۳) $\frac{۴۰۰}{۳}\pi$ ۴) $\frac{۵۰۰}{۳}\pi$

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا باتوجّه به مساحت کره شعاع آن را به دست می‌آوریم.

$$\text{مساحت کره}=۴\pi r^۲=۱۰۰\pi\Rightarrow ۴r^۲=۱۰۰\Rightarrow r^۲=۲۵\Rightarrow r=۵$$

با داشتن شعاع کره می‌توانیم حجم آن را نیز محاسبه کنیم.

$$V_{\text{کره}}=\frac{۴}{۳}\pi r^۳=\frac{۴}{۳}\pi ۵^۳=\frac{۱۲۵\times ۴}{۳}\pi=\frac{۵۰۰}{۳}\pi$$

۲۴. ارتفاع مخروطی سه برابر شعاع قاعده‌ی آن است. اگر حجم این مخروط ۲۱۶π باشد، ارتفاع مخروط چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۶ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

$$\text{شعاع قاعده}=R\ ,\ \ h=۳R$$

$$\text{حجم مخروط}\ V=\frac{۱}{۳}\pi R^۲h=\frac{۱}{۳}\pi R^۲(۳R)=\pi R^۳$$

$$\rightarrow ۲۱۶\pi=\pi R^۳\rightarrow R^۳=۲۱۶\rightarrow R=\sqrt[۳]{۲۱۶}\Rightarrow R=۶$$

$$\rightarrow h=۳\times ۶=۱۸$$

۲۵. اگر کره‌ای در استوانه محاط شده باشد، قطر کره همواره با کدام یک از گزینه‌های زیر مساوی نیست؟

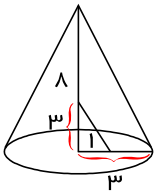
۱) ارتفاع استوانه ۲) قطر قاعده‌ی استوانه ۳) فاصله‌ی دو قاعده‌ی استوانه ۴) نصف محیط قاعده‌ی استوانه

پاسخ: گزینه ۴

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۲۶. مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع ۳ و ارتفاع ۸ و مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگری به ضلع ۱ و ارتفاع ۳ که داخل آن قرار دارد را حول ضلع ۸ دوران داده‌ایم. حجم بین دو شکل برابر است با:



۱) ۱۸π ۲) ۲۰π ۳) ۲۳π ۴) ۲۵π

پاسخ: گزینه ۳

مخروط بزرگ $V = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲ \times ۸ = \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۹ \times ۸ = ۲۴\pi$

مخروط کوچک $V = \frac{۱}{۳}\pi R'^۲ h' = \frac{۱}{۳}\pi(۱)^۲ \times ۳ = \frac{۱}{\cancel{۳}}\pi \times \frac{\cancel{۳}^{۱}}{\cancel{۳}} = \pi$

حجم فضای بین دو مخروط $= ۲۴\pi - \pi = ۲۳\pi$

۲۷. ستونی به شکل منشور ۵ پهلو است که هر ضلع قاعده‌اش ۰٫۵ متر و ارتفاع آن ۲۰ متر است. می‌خواهیم به بدنهٔ این ستون کاشی بچسبانیم، چند متر مربع کاشی لازم است؟

۱) ۲۵ ۲) ۵۰ ۳) ۴۰ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۲ هنگامی که می‌گوید منشور ۵ پهلو یعنی قاعدهٔ آن ۵ ضلعی منتظم است و منشور قائم است. پس داریم:

$۵ \times (۰٫۵ \times ۲۰) = ۵ \times ۱۰ = ۵۰(m)^۲$

۲۸. اگر شعاع قاعدهٔ استوانه را ۳ برابر کنیم، مساحت جانبی آن چند برابر می‌شود؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۲ مساحت جانبی استوانه برابر است با: محیط قاعده × ارتفاع.

شعاع قاعده $= r$ ، ارتفاع استوانه $= h$

مساحت جانبی اولیه $= ۲r\pi \times h = ۲rh\pi$

مساحت جانبی ثانویه $= ۲(۳r)\pi \times h = ۶rh\pi$

در نتیجه داریم:

$\rightarrow \frac{۶rh\pi}{۲rh\pi} = ۳$

۲۹. دو استوانه با حجم‌های برابر داریم. اگر شعاع قاعدهٔ استوانه اول ۳ برابر دومی باشد، نسبت ارتفاع استوانهٔ اول به دوم چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲

$V_۱ = V_۲ \rightarrow \pi {r_۱}^۲ h_۱ = \pi {r_۲}^۲ h_۲ \xrightarrow{r_۱ = ۳r_۲} \pi ۹ {r_۲}^۲ h_۱ = \pi {r_۲}^۲ h_۲$

$\rightarrow ۹h_۱ = h_۲ \rightarrow \frac{h_۱}{h_۲} = \frac{۱}{۹}$

۳۰. مساحت کره‌ای برابر با ۳۶π است. حجم آن برابر است با:

۱) ۳۶π ۲) ۹π ۳) ۱۰۸π ۴) ۲۷π

پاسخ: گزینه ۱

مساحت کره $= ۴\pi r^۲ = ۳۶\pi \rightarrow r^۲ = ۹ \rightarrow r = ۳$

حجم کره $= \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۴}{۳}\pi(۳)^۳ = ۳۶\pi$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۳۱. اگر قطر کره‌ای m برابر شود، حجم و مساحت چند برابر می‌شوند؟

۱) حجم $m^۳$ برابر و مساحت $m^۲$ برابر ۲) حجم $\frac{m^۳}{۸}$ برابر و مساحت $\frac{m^۲}{۴}$ برابر ۳) هر دو $m^۳$ برابر ۴) هر دو $\frac{m^۳}{۸}$ برابر

پاسخ: گزینه ۱ نکته: مساحت کره با شعاع r برابر $۴\pi r^۲$ و حجم آن برابر $\frac{۴}{۳}\pi r^۳$ است.

دقت کنید که گفته قطر کره m برابر شود در نتیجه شعاع کره نیز m برابر می‌شود.حال شعاع کره R فرض می‌کنیم.

$$\frac{V'}{V}=\frac{\frac{۴}{۳}\times\pi\times(mR)^۳}{\frac{۴}{۳}\times\pi\times(R)^۳}=\frac{m^۳R^۳}{R^۳}=m^۳$$

$$\frac{S'}{S}=\frac{۴\pi(mR)^۲}{۴\pi(R)^۲}=\frac{m^۲\times R^۲}{R^۲}=m^۲$$

۳۲. اگر بخواهیم با مقوا، مکعب مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ و ۵ درست کنیم، چند سانتی‌متر مربع مقوا نیاز داریم؟

۱) ۶۸ ۲) ۱۲۰ ۳) ۵۴ ۴) ۹۴

پاسخ: گزینه ۴ نکته: مساحت کل مکعب مستطیلی با ابعاد a، b و c برابر است با:

$$\text{مساحت کل}=۲(ab+ac+bc)$$

در واقع سؤال از ما مساحت کل مکعب را می‌خواهد:

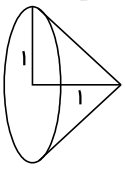
$$۲\times(۳\times۴+۴\times۵+۳\times۵)=۲\times(۱۲+۲۰+۱۵)=۲\times۴۷=۹۴$$

علت ضرب در ۲ بالا مشخص است، زیرا از هر نوع مستطیل دو تا داریم.

۳۳. حجم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم $۱cm$ حول یکی از اضلاع قائمه چقدر است؟

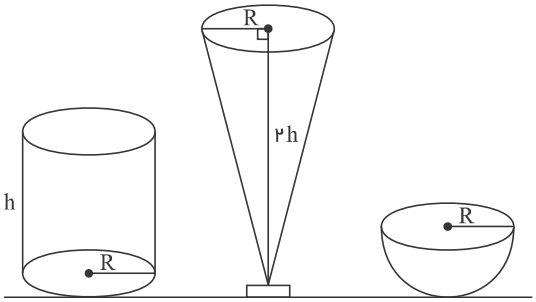
۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) π ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۱ حجم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم حول یک ضلع آن مخروطی به شعاع قاعده و ارتفاع ۱ است.



$$\text{حجم مخروط}=\frac{۱}{۳}Sh=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h=\frac{۱}{۳}\pi=\frac{\pi}{۳}$$

۳۴. باتوجّه به شکل‌های زیر، اگر ظرف استوانه‌ای شکل را پر از آب کرده و در دو ظرف دیگر خالی کنیم، دو ظرف پر شده و هیچ آبی در استوانه باقی نمی‌ماند. کدام رابطهٔ زیر درست است؟ (شعاع‌ها با هم مساوی و ارتفاع مخروط دو برابر ارتفاع استوانه است.)



۱) $h=\frac{۲}{۳}R$
۲) $h=\frac{۳}{۲}R$
۳) $h=۳R$
۴) $h=۲R$

پاسخ: گزینه ۴ باتوجّه به فرض مسئله حجم استوانه برابر حاصل جمع حجم نیم‌کره و مخروط است.

$$V_{\text{استوانه}}=V_{\text{نیم‌کره}}+V_{\text{مخروط}}$$

$$\pi R^۲h=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi R^۳+\frac{۱}{۳}\times\pi R^۲\cdot۲h$$

از $\pi R^۲$ فاکتورگیری می‌کنیم:

$$\pi R^۲=\frac{۲}{۳}\pi R^۳+\frac{۲}{۳}\pi R^۲h$$

$$\pi R^۲h=\pi R^۲(\frac{۲}{۳}R+\frac{۲}{۳}h)$$

$$\Rightarrow h=\frac{۲}{۳}R+\frac{۲}{۳}h\Rightarrow h-\frac{۲}{۳}h=\frac{۲}{۳}R$$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

$\Rightarrow \frac{۱}{۳}h = \frac{۲}{۳}R \Rightarrow h = ۲R$

۳۵. نسبت عدد حجم به مساحت کل مکعبی برابر با ۱ می‌باشد، مساحت جانبی این مکعب کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۱۴۴ ۴) ۲۱۶

پاسخ: گزینه ۳ باتوجّه به اینکه مساحت کل مکعب بر ضلع a برابر $۶a^۲$ و حجم مکعب به ضلع a برابر $a^۳$ است، پس:

$\frac{۶a^۲}{a^۳} = ۱ \Rightarrow \frac{۶}{a} = ۱ \Rightarrow a = ۶$

مساحت جانبی مکعب به ضلع a برابر $۴a^۲$ است.

$\Rightarrow ۴ \times ۶^۲ = ۱۴۴$

۳۶. ارتفاع مخروطی سه برابر شعاع قاعدهٔ آن است. اگر حجم مخروط ۲۱۶π باشد، ارتفاع آن برابر است با:

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۴

$h = ۳R$

$V = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ \times ۳R = \pi R^۳$

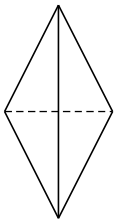
$\Rightarrow \pi R^۳ = ۲۱۶\pi \Rightarrow R^۳ = ۲۱۶ \Rightarrow R = ۶$

$h = ۳R = ۳ \times ۶ = ۱۸$

۳۷. مساحت کلّ هرم منتظمی که قاعدهٔ آن مثلث و طول هر یال آن ۴ سانتی‌متر باشد، چند سانتی‌متر مربع است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $۱۶\sqrt{۳}$ ۴) $۱۶\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۳



مساحت ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a = مساحت کل چهاروجهی منتظم

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ در این صورت:

مساحت کل هرم $= ۴ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = ۴ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۴^۲ = ۱۶\sqrt{۳}$

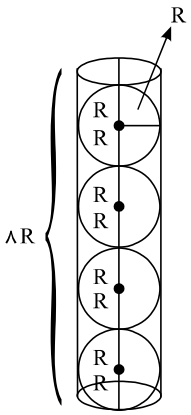
۳۸. در یک قوطی استوانه‌ای حاوی ۴ توپ تنیس که ارتفاعی دقیقاً به اندازهٔ ۴ توپ دارد و توپ‌ها به جداره چسبیده‌اند. حجم فضای خالی اطراف توپ‌ها در استوانه چند برابر حجم یک توپ است؟

۱) ۴ برابر ۲) ۳ برابر ۳) ۲٫۵ برابر ۴) ۲ برابر

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

پاسخ: گزینه ۴



استوانه $h = ۸R$

حجم استوانه $= \pi R^۲ h = \pi R^۲ \times ۸R = ۸\pi R^۳$

حجم یک توپ $= \frac{۴}{۳}\pi R^۳$

حجم چهار توپ $= ۴ \times \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۱۶}{۳}\pi R^۳$

حجم فضای خالی = حجم چهار توپ − حجم استوانه $= ۸\pi R^۳ - \frac{۱۶}{۳}\pi R^۳ = \frac{۸}{۳}\pi R^۳ \Rightarrow \frac{\text{فضای خالی}}{\text{حجم یک توپ}} = \frac{\frac{۸}{۳}\pi R^۳}{\frac{۴}{۳}\pi R^۳} = ۲$

۳۹. حجم کره‌ای به شعاع R چند برابر حجم مخروطی به شعاع R و ارتفاع $۳R$ است؟

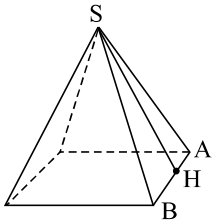
۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}\pi$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۴}{۹}\pi$

پاسخ: گزینه ۱ نسبت حجم کره به مخروط را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{V_{\text{کره}}}{V_{\text{مخروط}}} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi R^۳}{\frac{۱}{۳}\pi R^۲ h} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi R^۳}{\frac{۱}{۳}\pi R^۲ \cdot ۳R} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi R^۳}{\pi R^۳} = \frac{۴}{۳}$$

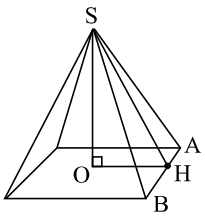
پس حجم کره به شعاع R، $\frac{۴}{۳}$ برابر حجم مخروط به شعاع R و ارتفاع $۳R$ است.

۴۰. در هرم مربعی منتظم زیر $\overline{SA} = \sqrt{۳۴}$ و $\overline{SH} = ۵$، حجم هرم کدام است؟



۱) ۵۶ ۲) ۵۲ ۳) ۵۴ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینه ۴ ابتدا باتوجّه به رابطهٔ فیثاغورس برای مثلث قائم‌الزاویه SAH داریم:



$$(AH)^۲ + (SH)^۲ = (AS)^۲$$
$$(AH)^۲ + ۲۵ = ۳۴ \Rightarrow (AH)^۲ = ۹$$
$$\Rightarrow AH = ۳$$

چون هرم مربعی و منتظم است، در نتیجه $AH = OH$ حال باتوجّه به رابطهٔ فیثاغورس برای مثلث SOH داریم:

$$\overline{SO}^۲ + \overline{OH}^۲ = \overline{SH}^۲$$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

$\overline{SO}^{۲} + ۳^{۲} = ۵^{۲} \Rightarrow SO^{۲} = ۵^{۲} - ۳^{۲} = ۱۶ \Rightarrow SO = ۴$

همچنین ضلع مربع AB دو برابر AH است. پس:

$AB = ۲ \times AH = ۲ \times ۳ = ۶$

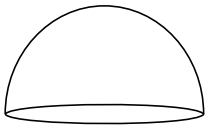
حال حجم هرم را به دست می‌آوریم:

هرم $V = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{۳} \times ۶ \times ۶ \times ۴ = ۴۸$

۴۱. مساحت کلّ نیم‌کره‌ای توپُر به شعاع R چند برابر مساحت کره‌ای به شعاع R است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا مساحت کل نیم‌کره را به دست می‌آوریم:



مساحت کل نیم‌کره $= ۲\pi r^{۲} + \pi r^{۲} = ۳\pi r^{۲}$

مساحت کره $= ۴\pi r^{۲}$

$\frac{\text{مساحت کل نیم‌دایره}}{\text{مساحت کره}} = \frac{۳\pi r^{۲}}{۴\pi r^{۲}} = \frac{۳}{۴}$

۴۲. در داخل یک مکعب به ضلع a، بزرگ‌ترین کرهٔ ممکن قرار دارد. نسبت مساحت کره به مساحت کل مکعب کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi}{۸}$

پاسخ: گزینه ۳ کره‌ای که ایجاد می‌شود دارای شعاع $\frac{a}{۲}$ می‌باشد.

$\frac{\text{مساحت کره}}{\text{مساحت کل مکعب}} = \frac{۴\pi r^{۲}}{۶a^{۲}} = \frac{۴\pi(\frac{a}{۲})^{۲}}{۶a^{۲}} = \frac{۴\pi\frac{a^{۲}}{۴}}{۶a^{۲}} = \frac{\pi}{۶}$

۴۳. اتاقی داریم به شکل منشور، با قاعدهٔ شش‌ضلعی منتظم، اگر از نقطه‌ای روی سقف اتاق، شش نخ به رأس‌های کف اتاق وصل کنیم. حجم هرم به وجود آمده، چند برابر حجم اتاق خواهد بود؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ برابر ۲) $\frac{۱}{۲}$ برابر ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$ برابر

پاسخ: گزینه ۱

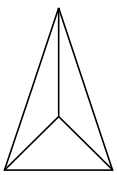
$\left.\begin{array}{l}\text{حجم منشور} = sh \\ \text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳}sh\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\text{حجم هرم}}{\text{حجم منشور}} = \frac{\frac{۱}{۳}\cancel{sh}}{\cancel{sh}} = \frac{۱}{۳}$

۴۴. مساحت جانبی هرم منتظمی که قاعدهٔ آن مثلث و طول هر یال آن ۴ سانتی‌متر می‌باشد، چند سانتی‌متر مربع است؟

۱) $۱۶\sqrt{۳}$ ۲) $۱۲\sqrt{۳}$ ۳) $۲۴\sqrt{۲}$ ۴) $۱۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۲

چون هرم منتظم است، پس قاعدهٔ آن مثلث متساوی‌الاضلاع است و در واقع شکل همان چهاروجهی منتظم است و مساحت جانبی آن از ۳ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است.



نکته: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$ است.

حال مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ را به دست می‌آوریم که برابر است با:

$\frac{۴^{۲}\sqrt{۳}}{۴} = ۴\sqrt{۳}$

حال مساحت مثلث را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$۴\sqrt{۳} \times ۳ = ۱۲\sqrt{۳}$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۴۵. یک کره به شعاع $۶cm$ را درون یک ظرف استوانه‌ای که مقداری آب دارد می‌اندازیم، ارتفاع آب $۸cm$ افزایش می‌یابد، شعاع قاعدهٔ استوانه کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا حجم کره به شعاع $۶cm$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{کره } V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۴}{۳}\pi ۶^۳ = ۲۸۸\pi$$

حال این حجم را برابر حجم افزوده شده قرار می‌دهیم:

$$\text{استوانه } V = sh = \pi r^۲ h = ۸\pi r^۲ = ۲۸۸\pi \Rightarrow ۸r^۲ = ۲۸۸$$

$$r^۲ = ۳۶ \Rightarrow r = ۶$$

۴۶. کدام گزینه صحیح است؟

۱) چهاروجهی منتظم هرمی است که قاعدهٔ آن مربع است.

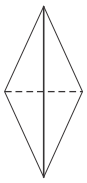
۲) اگر شعاع کره‌ای را دو برابر کنیم حجم آن چهار برابر می‌شود.

۳) در هرم منتظم شکل وجه‌های جانبی همیشه مثلث متساوی‌الاضلاع است.

۴) حجم استوانه‌ای که شعاع و ارتفاع آن a باشد، برابر $\pi a^۳$ می‌باشد.

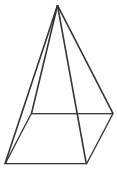
پاسخ: گزینه ۴ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: نادرست. چهاروجهی منتظم هرمی است که قاعدهٔ آن مثلث متساوی‌الاضلاع است.



گزینهٔ ۲: نادرست. اگر شعاع کره‌ای را دو برابر کنیم، حجم آن ۸ برابر می‌شود.

گزینهٔ ۳: نادرست. هرم منتظم شکلی است که قاعدهٔ آن شکل منتظمی باشد و ممکن است وجه‌های آن مثلث متساوی‌الاضلاع نباشد.

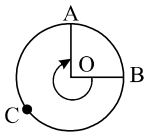


گزینهٔ ۴: درست.

حجم استوانه به صورت $\pi r^۲ h$ است و اگر $r = a$ و $h = a$ آنگاه:

$$\pi r^۲ h = \pi a^۳$$

۴۷. فرض کنید مساحت دایرهٔ مقابل برابر ۱۰۰π باشد، در این صورت باتوجّه به شکل طول کمان $\overset{\frown}{ACB}$ برابر است با: (O مرکز دایره و زاویه $AOB = ۹۰^\circ$)



۱) ۱۵π ۲) ۲۵π

۳) ۳۵π ۴) ۴۵π

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا باتوجه به مساحت دایره، شعاع دایره را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{دایره } S = \pi r^۲ = ۱۰۰\pi \Rightarrow r^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow r = ۱۰$$

حال برای به دست آوردن کمان $\overset{\frown}{ACB}$ کافیست $\frac{۳}{۴}$ محیط دایره را به دست آوریم:

$$\text{محیط دایره } \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴} \times ۲۰\pi = ۱۵\pi$$

۴۸. یک هرم منتظم با قاعدهٔ چهارضلعی و مساحت قاعدهٔ ۳۶ سانتی‌متر مربع داریم. اگر ارتفاع هرم ۴ سانتی‌متر باشد، مساحت جانبی هرم چند سانتی‌متر مربع است؟

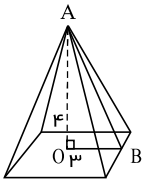
۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

پاسخ: گزینه ۳ هرم منتظم با قاعدهٔ چهارضلعی، همان هرم منتظم با قاعدهٔ مربع است، باتوجّه به اینکه مساحت قاعدهٔ این هرم برابر ۳۶ است، پس ضلع مربع برابر ۶ است، OB به اندازهٔ نصف ضلع مربع است، پس: $OB = ۳$

حال رابطهٔ فیثاغورس را برای مثلث AOB می‌نویسیم:

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir



$AO^۲ + OB^۲ = AB^۲ \Rightarrow ۴^۲ + ۳^۲ = AB^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۲۵ \Rightarrow AB = ۵$

حال مساحت وجه جانبی (مثلث) را به دست می‌آوریم:

$\frac{۵ \times ۶}{۲} = ۱۵$

چون وجه‌های جانبی این هرم از چهار مثلث هم‌نهشت تشکیل شده، پس:

$۱۵ \times ۴ = ۶۰$

۴۹. شعاع قاعده‌ی استوانه‌ای برابر با شعاع یک کره و ارتفاع آن $\frac{۳}{۴}$ قطر همان کره است. حجم استوانه چه کسری از حجم کره است؟

۱) $\frac{۸}{۹}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۹}{۸}$

پاسخ: گزینه ۴

شعاع کره = شعاع قاعده استوانه $= R$

ارتفاع استوانه $= \frac{۳}{۴} \times$ قطر کره $= \frac{۳}{\cancel{۴}_{۲}} \times \cancel{۲}^{۱} R = \frac{۳}{۲} R$

حجم استوانه $= \pi R^۲ h = \pi R^۲ \times \frac{۳}{۲} R = \frac{۳\pi}{۲} R^۳$

حجم کره $= \frac{۴}{۳} \pi R^۳$

$\rightarrow \frac{V \text{ استوانه}}{V \text{ کره}} = \frac{\frac{۳}{۲} \cancel{\pi} \cancel{R^۳}}{\frac{۴}{۳} \cancel{\pi} \cancel{R^۳}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۴}{۳}} = \frac{۹}{۸}$

۵۰. سطح کره‌ای که حجم آن ۳۶π می‌باشد برابر است با .....

۱) ۹π ۲) ۴π ۳) ۳۶π ۴) ۱۶π

پاسخ: گزینه ۳

حجم کره $= ۳۶\pi \rightarrow \frac{۴}{۳} \cancel{\pi} r^۳ = ۳۶ \cancel{\pi} \rightarrow \frac{۴}{۳} r^۳ = ۳۶$

$\rightarrow r^۳ = \frac{\frac{۳۶}{۱}}{\frac{۴}{۳}} = \frac{\cancel{۳۶}^{۹} \times ۳}{\cancel{۴}^{۱} \times ۱} = ۲۷ \rightarrow r^۳ = ۲۷ \rightarrow r = \sqrt[۳]{۲۷} = \sqrt[۳]{۳^۳} = ۳ \rightarrow r = ۳$ شعاع

مساحت کره $= ۴\pi r^۲ = ۴ \times \pi \times ۳^۲ = ۴ \times \pi \times ۹ = ۳۶\pi$

نکته: اگر شعاع کره ۳ باشد، حجم و مساحت کره مساوی می‌شوند.

۵۱. برای پوشاندن سطح یک توپ کروی شکل، ۴۳۲ سانتی‌متر مربع چرم مصرف شده است. قطر این توپ چند سانتی‌متر است؟ $(\pi = ۳)$

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینه ۲

مساحت کره $= ۴\pi r^۲$

$۴ \times ۳ \times r^۲ = ۴۳۲ \rightarrow ۱۲ r^۲ = ۴۳۲ \rightarrow r^۲ = \frac{۴۳۲}{۱۲} = ۳۶ \rightarrow r = \sqrt{۳۶} = ۶$

$d = ۲r = ۲ \times ۶ = ۱۲$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۵۲. اگر عدد مساحت یک کره ۳ برابر عدد حجم آن باشد، شعاع کره کدام یک از اعداد زیر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱

$\text{مساحت کره} = ۳ \times \text{حجم کره} \Rightarrow S = ۳V$

$\text{دو طرف ساده می‌شود} \leftarrow ۴\pi r^۲ = ۳ \times \frac{۴}{۳}\pi r^۳ \rightarrow r^۲ = r^۳ \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{دو طرف را به } r^۲} \frac{r^۲}{r^۲} = \frac{r^۳}{r^۲} \rightarrow r = ۱$

۵۳. اگر مساحت کره‌ای ۱۶π باشد، حجم آن کره کدام است؟

۱) ۳۲π ۲) $\frac{۸}{۳}\pi$ ۳) $\frac{۳۲}{۳}\pi$ ۴) $\frac{۱۶}{۳}\pi$

پاسخ: گزینه ۳

$\text{مساحت کره} = ۴\pi r^۲$

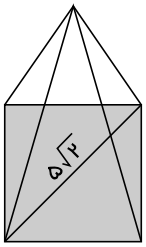
$۴\pi r^۲ = ۱۶\pi \rightarrow ۴r^۲ = ۱۶ \rightarrow r^۲ = \frac{۱۶}{۴} \rightarrow r^۲ = ۴ \rightarrow r = \sqrt{۴} = ۲$

$\text{حجم کره} = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ \overset{r=۲}{=} \frac{۴}{۳} \times \pi \times ۲^۳ = \frac{۴}{۳} \times \pi \times ۸ = \frac{۳۲}{۳}\pi$

۵۴. حجم هرم مربع‌القاعده‌ای به قطر قاعده‌ی $۵\sqrt{۲}$ و ارتفاع ۱۲ کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۵۰

پاسخ: گزینه ۱ نکته: قطر هر مربع به ضلع a برابر است با $a\sqrt{۲}$. پس ضلع مربع ۵ بوده است.



$\text{حجم هرم} = \frac{\text{قاعده } S \times \text{ارتفاع}}{۳} = \frac{(۵ \times ۵) \times ۱۲}{۳} = ۱۰۰$

۵۵. در یک هرم با قاعده‌ی مثلث، در یک رأس سه یال آن دوبه‌دو بر هم عمودند. اگر اندازه‌ی این یال‌ها ۲ و ۳ و ۴ سانتی‌متر باشد، حجم هرم چند سانتی‌متر مکعب است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۱ کافی است یکی از وجه‌ها را که دو یال عمود برهم، اضلاع قائمه‌ی آن هستند، به عنوان قاعده و یال دیگر را که بر این وجه عمود است، به عنوان ارتفاع هرم در نظر گرفت.

$V = \frac{۱}{۳}\underbrace{S}_{\text{قاعده}} \times \underbrace{h}_{\text{ارتفاع}} = \frac{۱}{\cancel{۳}_{۱}}(\frac{۱}{\cancel{۲}_{۱}}(\cancel{۳}^{۲} \times \cancel{۳}^{۱})) \times ۲ = ۴cm^۲$

۵۶. حجم کره‌ای به شعاع R برابر با حجم مخروطی به شعاع قاعده‌ی R است. ارتفاع مخروط چند برابر شعاع کره است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

$\left.\begin{array}{l} \text{کره } V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \\ \text{مخروط } V = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h \end{array}\right\} \rightarrow \text{با توجه به سؤال: کره } V = \text{مخروط } V \rightarrow \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h \Rightarrow h = \frac{\frac{۴}{۳}\pi R^۳}{\frac{۱}{۳}\pi R^۲} = ۴R$

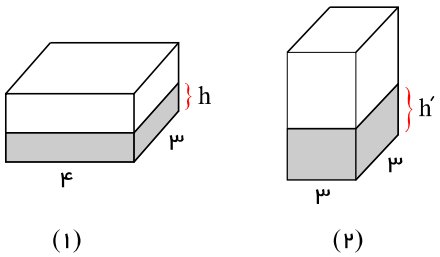
۵۷. در یک مکعب مستطیل دربسته به ابعاد ۳، ۳ و ۴ سانتی‌متر مقداری آب ریختیم. اگر این ظرف را در دو حالت (یک بار روی سطح مستطیل و بار دیگر روی سطح مربع) روی زمین قرار دهیم، نسبت ارتفاع‌های آب در دو حالت کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

پاسخ: گزینه ۴



(۱) (۲)

(۱) $\rightarrow$ آب در این حالت $V = ۴ \times ۳ \times h = ۱۲h$

(۲) $\rightarrow$ آب در این حالت $V = ۳ \times ۳ \times h' = ۹h'$

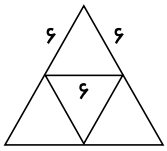
چون مقدار آب داخل مکعب ثابت است پس حجم هر دو ثابت و با هم برابر است.

$$۱۲h = ۹h' \rightarrow \frac{h}{h'} = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴}$$

۵۸. مساحت کل هرم منتظمی که قاعده آن مثلث و طول هر یال آن ۶ سانتی‌متر است، چند سانتی‌متر مربع است؟

۱) $۹\sqrt{۳}$ ۲) $۳۶\sqrt{۲}$ ۳) $۳۶\sqrt{۳}$ ۴) $۹\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۳



گسترده‌ی هرم به شکل زیر است. کافی است مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۶cm$ را حساب کرده و در چهار ضرب کنیم تا مساحت کل هرم به دست آید.

نکته: مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{۳}a^۲}{۴}$

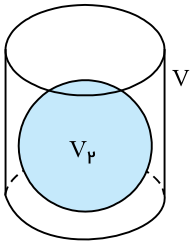
مثلث متساوی‌الاضلاع $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۶^۲ = \frac{۳۶\sqrt{۳}}{۴} = ۹\sqrt{۳}$

هرم $S = ۴ \times ۹\sqrt{۳} = ۳۶\sqrt{۳}$

۵۹. کره‌ای داخل یک استوانه محاط شده است. نسبت حجم کره به حجم استوانه همواره برابر است با:

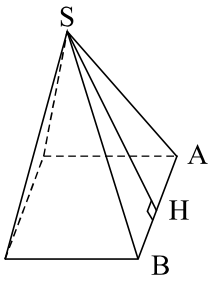
۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱



$$\frac{V_۲}{V_۱} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi R^۳}{\pi R^۲ \times ۲R} = \frac{۲}{۳}$$

۶۰. در هرم منتظم مربع‌القاعده‌ی زیر، $SA = ۱۰cm$ و $SH = ۸cm$ است، حجم این هرم کدام است؟



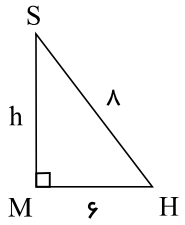
۱) $۱۲\sqrt{۲۸}cm^۳$
۲) $۴۸\sqrt{۲۸}cm^۳$
۳) $۴۸\sqrt{۱۴}cm^۳$
۴) $۲۴\sqrt{۱۴}cm^۳$

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا اندازه‌ی AH یعنی نصف ضلع قاعده‌ی مربع را می‌یابیم.

بنابر قضیه‌ی فیثاغورث داریم: $AS^۲ = SH^۲ + AH^۲$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir



$$AH^{۲} = AS^{۲} - SH^{۲}$$

$$\rightarrow AH^{۲} = ۱۰^{۲} - ۸^{۲} = ۱۰۰ - ۶۴ = ۳۶$$

$$\rightarrow AH = \sqrt{۳۶} = ۶$$

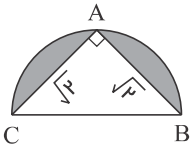
$$\xrightarrow{\text{ضلع مربع}} AB = ۲ \times ۶ = ۱۲ \rightarrow \text{مساحت قاعده} = ۱۲ \times ۱۲ = ۱۴۴cm^{۲}$$

حال باید ارتفاع هرم را بیابیم، MH نصف ضلع مربع است.

$$h^{۲} = ۸^{۲} - ۶^{۲} = ۶۴ - ۳۶ = ۲۸ \rightarrow h = \sqrt{۲۸} \rightarrow V_{\text{هرم}} = \frac{۱}{۳}(\text{قاعده } S)(h)$$

$$= \frac{۱}{\cancel{۳}_{۱}} \times \cancel{۱۴۴}_{۴۸} \times \sqrt{۲۸} = ۴۸\sqrt{۲۸}cm^{۳}$$

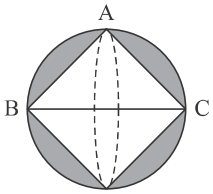
۶۱. حجم حاصل از دوران قسمت هاشورخورده حول BC کدام است؟



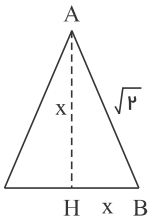
۱) $\frac{۴}{۳}\pi$ ۲) π ۳) $\frac{۲}{۳}\pi$ ۴) ۸π

پاسخ: گزینه ۳

از دوران شکل حول BC یک کره که در داخل آن دو مخروط که از قاعده به هم متصل هستند، کم شده است.



برای به دست آوردن حجم حاصل از قسمت هاشورخورده، حول BC کافیست حجم کره را منهای دو مخروط ایجاد شده کنیم.



باتوجه به رابطهٔ فیثاغورس:

$$AH^{۲} + BH^{۲} = (\sqrt{۲})^{۲}$$

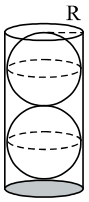
$$\Rightarrow ۲x^{۲} = ۲ \Rightarrow x^{۲} = ۱ \rightarrow x = ۱$$

پس شعاع کره و شعاع قاعدهٔ مخروط و ارتفاع مخروط برابر ۱ است.

$$V_{\text{کره}} - V_{\text{دو مخروط}} = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} - ۲ \times \frac{۱}{۳} \times \pi r^{۲} h$$

$$= \frac{۴}{۳}\pi - \frac{۲}{۳}\pi = \frac{۲}{۳}\pi$$

۶۲. در شکل زیر درون ظرف استوانه‌ای شکل به شعاع R دو کره محاط کرده‌ایم. کدام گزینه درست است؟

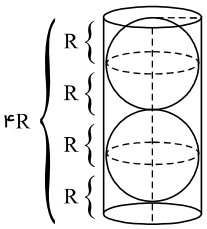


۱) حجم فضای خالی بیش‌تر از حجم هر کره است.
۲) حجم فضای خالی کم‌تر از حجم هر کره است.
۳) حجم فضای خالی مساوی حجم هر کره است.
۴) حجم دو کره مساوی حجم استوانه است.

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

پاسخ: گزینه ۳



برای پاسخ به این سؤال ابتدا حجم فضای خالی بین استوانه و کره‌ها را به دست می‌آوریم (البته برحسب R). شعاع هر کره برابر R، شعاع قاعدهٔ استوانه برابر R و ارتفاع آن برابر $۴R$ است.

حجم استوانه $= \pi R^۲ h = \pi R^۲ ۴R = ۴\pi R^۳$

حجم کره $= \frac{۴}{۳}\pi R^۳$

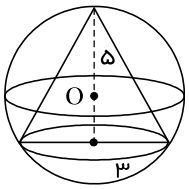
دو کره $V = ۲ \times \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۸}{۳}\pi R^۳$

حجم فضای خالی بین کره و استوانه = استوانه V − کره‌ها V

$$= ۴\pi R^۳ - \frac{۸}{۳}\pi R^۳ = \frac{۱۲}{۳}\pi R^۳ - \frac{۸}{۳}\pi R^۳ = \frac{۴}{۳}\pi R^۳$$

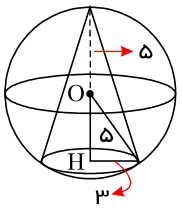
پس حجم فضای خالی برابر حجم یک کره است.

۶۳. در کره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر یک مخروط به شعاع قاعده‌ی ۳ سانتی‌متر محاط شده است، حجم مخروط چقدر است؟



۱) ۲π ۲) ۲۴π
۳) ۲۷π ۴) ۲۶π

پاسخ: گزینه ۳ برای پیدا کردن OH مثلث قائم‌الزاویه زیر را در نظر بگیرید به کمک فیثاغورس داریم:



$$OH^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \rightarrow OH = ۴ \rightarrow \text{ارتفاع مخروط} = ۵ + ۴ = ۹$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi r^۲ h}{۳} = \frac{\pi \times ۳ \times ۳ \times ۹}{۳} = ۲۷\pi cm^۳$$

۶۴. اگر شعاع قاعده‌ی مخروطی را نصف کنیم و ارتفاع آن را دو برابر کنیم، حجم آن چه تغییری می‌کند؟

۱) تغییر نمی‌کند. ۲) دو برابر می‌شود. ۳) نصف می‌شود. ۴) چهار برابر می‌شود.

پاسخ: گزینه ۳

مخروط اولیه $V = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h \xrightarrow[h'=۲h]{r=\frac{R}{۲}} V_{\text{جدید}} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h'$

$$\frac{۱}{۳}\pi(\frac{R}{۲})^۲ \times ۲h = \frac{۱}{۳}\pi\frac{R^۲}{۴} \times \frac{۱}{۲}h = \frac{۱}{۶}\pi R^۲ h$$

$$\rightarrow \frac{\text{مخروط جدید } V}{\text{اولیه } V} = \frac{\frac{۱}{۶}\pi R^۲ h}{\frac{۱}{۳}\pi R^۲ h} = \frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۱}{۳}} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

مخروط جدید $\frac{۱}{۲}$ برابر مخروط اولیه خواهد بود.

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۶۵. یک بادکنک کروی در حال حاضر دارای حجم و مساحتی مساوی است. اگر آن را دوباره باد کرده و $\frac{۱۴۸\pi}{۳}$ سانتی‌متر مکعب هوا به آن وارد کنیم، با این عمل مساحت بادکنک چند سانتی‌متر مربع افزایش می‌یابد؟

۱) ۹π ۲) ۲۸π ۳) ۶۴π ۴) ۵۶π

پاسخ: گزینه ۲ ابتدا شعاع کره را در حالت اول پیدا می‌کنیم:

مساحت = حجم

$$\frac{۴}{۳}\pi R^۳ = ۴\pi R^۲ \rightarrow \frac{R^۳}{R^۲} = \frac{۴}{\frac{۴}{۳}} \rightarrow R = \frac{۱۲}{۴} = ۳$$

بنابراین مساحت در حالت اول برابر است با:

کره در حالت اول $S = ۴\pi R^۲ = ۴ \times \pi \times ۳^۲ = ۳۶\pi$

چون در حالت اول مساحت و حجم کره از نظر عددی برابر بودند، بنابراین حجم کره در حالت اول نیز ۳۶π است.

در حالت دوم به حجم کره $\frac{۱۴۸\pi}{۳}$ اضافه شده است. پس حجم کره در حالت دوم برابر است با:

$$۳۶\pi + \frac{۱۴۸\pi}{۳} = \frac{۱۰۸}{۳}\pi + \frac{۱۴۸}{۳}\pi = \frac{۲۵۶}{۳}\pi$$

مقدار شعاع در حالت دوم: $\frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۲۵۶}{۳}\pi \rightarrow ۴R^۳ = ۲۵۶ \rightarrow R^۳ = \frac{۲۵۶}{۴} = ۶۴$

کره در حالت دوم $S: ۴\pi R^۲ = ۴\pi \times ۴^۲ = ۶۴\pi$ $\rightarrow R = \sqrt[۳]{۶۴} = ۴$

مساحت افزایش یافته = مساحت حالت ۲ − مساحت حالت ۱

مساحت افزایش یافته: $۶۴\pi - ۳۶\pi = ۲۸\pi$

۶۶. اگر ابعاد مکعب مستطیلی را ۳ برابر کنیم، قطر، مساحت جانبی، مساحت کل و حجم به ترتیب چند برابر می‌شوند؟

۱) ۳، ۳، ۳، ۹ ۲) ۳، ۹، ۹، ۲۷ ۳) ۳، ۹، ۹، ۹ ۴) ۹، ۹، ۹، ۲۷

پاسخ: گزینه ۲ فرض کنید ابعاد مستطیل a، b، c هستند که ۳ برابر می‌شوند:

قطر: $$\frac{\sqrt{(۳a)^۲ + (۳b)^۲ + (۳c)^۲}}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}} = \frac{\sqrt{۹a^۲ + ۹b^۲ + ۹c^۲}}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}} = \frac{\sqrt{۹(a^۲ + b^۲ + c^۲)}}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}} = \frac{۳\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}}{\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}} = ۳$$

مساحت جانبی: $$\frac{۲ \times (۳a \times ۳b + ۳a \times ۳c)}{۲ \times (ab + ac)} = \frac{۹ab + ۹ac}{ab + ac} = \frac{۹(ab + ac)}{ab + ac} = ۹$$

مساحت کل: $$\frac{۲ \times (۳a \times ۳b + ۳a \times ۳c + ۳b \times ۳c)}{۲ \times (ab + ac + bc)} = \frac{۹ab + ۹ac + ۹bc}{ab + ac + bc} = \frac{۹(ab + ac + bc)}{(ab + ac + bc)} = ۹$$

حجم: $$\frac{۳a \times ۳b \times ۳c}{abc} = \frac{۲۷abc}{abc} = ۲۷$$

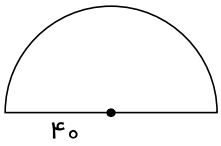
۶۷. ورزشگاهی به شکل نیم‌کره به شعاع ۴۰ متر است. اگر بخواهیم نمای خارجی این ورزشگاه را رنگ کنیم و هر قوطی رنگ، برای رنگ‌آمیزی ۸۰ متر مربع کافی باشد، حداقل چند قوطی رنگ برای رنگ‌آمیزی لازم است؟ $(\pi = ۳/۱۴)$

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۲۶ ۳) ۲۵۰ ۴) ۲۵۲

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

پاسخ: گزینه ۲

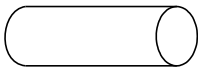


$$\text{کره } S = ۴\pi r^۲ \rightarrow \text{نیم‌کره } S = \frac{۴\pi r^۲}{۲}$$

$$\rightarrow \text{نیم‌کره } S = \frac{۴\pi \times ۴۰ \times ۴۰}{۲} = ۳۲۰۰\pi\, m^۲$$

$$۲۲۰۰\pi \div ۸۰ = ۴۰۰\pi \rightarrow ۴۰۰ \times ۳{,}۱۴ = ۱۲۶$$

۶۸. مساحت سطح برش عرضی یک لوله برابر با $۲۵۰ cm^۲$ می‌باشد. آب در لوله با سرعت ۳ لیتر بر ثانیه جریان می‌یابد. سرعتی که در آن آب در لوله برحسب $\frac{cm}{s}$ جریان می‌یابد برابر است با:



۱) ۱۵ ۲) ۱٫۲ ۳) ۶ ۴) ۱۲

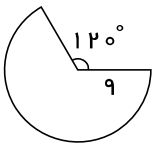
پاسخ: گزینه ۴

هر لیتر برابر ۱۰۰۰ سانتی مترمکعب می‌باشد.

۳ لیتر بر ثانیه $= ۳۰۰۰ \frac{cm^۳}{s}$

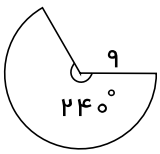
$$\frac{۳۰۰۰ \frac{cm^۳}{s}}{۲۵۰\, cm^۲} = \frac{۳۰۰۰}{۲۵۰}\frac{cm}{s} = ۱۲\frac{cm}{s}$$

۶۹. با قسمتی از دایره‌ای به شعاع $۹cm$ مخروطی ساخته‌ایم. شعاع قاعده‌ی این مخروط برابر است با:



۱) ۹ ۲) ۶
۳) ۳ ۴) ۷

پاسخ: گزینه ۲ محیط شکل داده شده با محیط قاعده‌ی مخروط برابر است.



$$\text{محیط قسمتی از دایره} = \frac{۲۴۰}{۳۶۰}(۲\pi R) = \frac{۲۴۰}{۳۶۰}(۲\pi \times ۹)$$

$$= \frac{۴ \times ۹ \times \pi}{۳} = ۱۲\pi$$

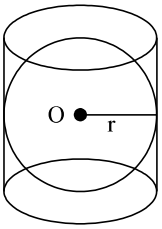
محیط قاعده مخروط $= ۲\pi R$

محیط قسمتی از دایره $= ۲\pi R = ۱۲\pi \Rightarrow R = ۶$

۷۰. کره‌ای که حجم آن ۳۶π است را داخل استوانه محاط می‌کنیم. حجم استوانه چه‌قدر است؟

۱) ۳۶π ۲) ۵۴π ۳) ۲۷π ۴) ۴۵π

پاسخ: گزینه ۲ هنگامی که کره‌ای درون استوانه‌ای محاط می‌شود شعاع قاعدهٔ استوانه و کره برابر است و ارتفاع استوانه برابر است با قطر کره.



(شعاع استوانه) $R = r$ و (ارتفاع استوانه) $h = ۲r$

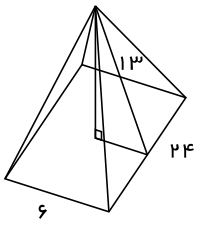
$$V_{\text{کره}} = \frac{۴}{۳}\pi r^۲ = ۳۶\pi \rightarrow r^۳ = ۳۶ \times \frac{۳}{۴} = ۲۷ \rightarrow r = ۳$$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^۲ \times h = \pi \times ۳^۲ \times ۶ = ۵۴\pi$$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

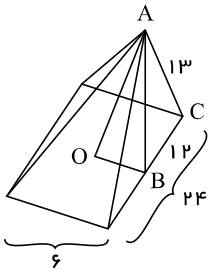
برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۷۱. حجم شکل زیر برابر کدام گزینه است؟



۱) ۱۹۲
۲) ۱۲۹
۳) ۲۲۹
۴) ۱۹۶

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا برای مثلث ABC رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:



$$AB^۲ + BC^۲ = AC^۲$$

$$AB^۲ + ۱۲^۲ = ۱۳^۲$$

$$\Rightarrow AB^۲ = ۲۵ \Rightarrow AB = ۵$$

حال برای مثلث AOB داریم:

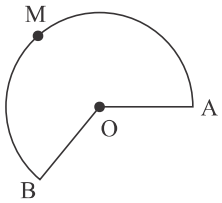
$$AO^۲ + OB^۲ = AB^۲$$

$$AO^۲ + ۳^۲ = ۵^۲ \Rightarrow AO^۲ = ۱۶ \Rightarrow AO = ۴$$

پس ارتفاع این هرم برابر ۴ است حال حجم هرم را محاسبه می‌کنیم:

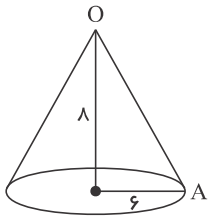
$$\text{هرم } V = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{۳} \times ۶ \times ۲۴ \times ۴ = ۱۹۲$$

۷۲. با برشی از دایره مطابق شکل، مخروطی ساخته‌ایم. اگر حجم مخروط ۲۸۸ و ارتفاع آن ۸ باشد، اندازهٔ کمان AMB چند درجه است؟ $(\pi = ۳)$



۱) ۲۱۶°
۲) ۲۰۰°
۳) ۱۹۷°
۴) ۲۳۰°

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا باتوجه به رابطهٔ حجم مخروط، مساحت قاعدهٔ آن را به دست می‌آوریم و سپس شعاع قاعدهٔ مخروط را محاسبه می‌کنیم.



$$V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h \Rightarrow \frac{۱}{۳} \times ۳r^۲ \times ۸ = ۲۸۸$$

حال باتوجه به اینکه کمان AB برابر محیط دایره‌ای است که در واقع قاعدهٔ مخروط است، در نتیجه محیط قاعدهٔ مخروط (دایره‌ای به شعاع ۶) را به دست می‌آوریم:

$$\text{محیط دایره } ۲\pi r = ۲ \times ۳ \times ۶ = ۳۶$$

باتوجه به شعاع قاعدهٔ مخروط و ارتفاع آن و قضیهٔ فیثاغورس شعاع AO را محاسبه می‌کنیم.

$$۶^۲ + ۸^۲ = AO^۲ \Rightarrow AO^۲ = ۱۰۰$$

$$\Rightarrow AO = ۱۰$$

با تقسیم اندازهٔ محیط قطاع AB بر محیط دایره‌ای به شعاع AO اندازهٔ کمان AB (برحسب درجه) را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۳۶}{۲\pi R} = \frac{۳۶}{۲ \times ۳ \times ۱۰} = \frac{۳۶}{۶۰} = \frac{۳}{۵}$$

۳	۲۱۶
۵	۳۶۰

در نتیجه $\overset{\frown}{AB} = ۲۱۶^\circ$.

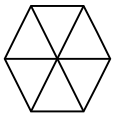
برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۷۳. قاعدهٔ یک هرم، شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۴ می‌باشد اگر ارتفاع آن $۱۰\sqrt{۳}$ باشد حجم هرم کدام است؟

۱) $۲۴\sqrt{۳}$ ۲) ۷۲۰ ۳) $۷۲۰\sqrt{۳}$ ۴) ۲۴۰

پاسخ: گزینه ۴



نکته: مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع a برابر $\frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}$ است.

شش‌ضلعی منتظم به ضلع a از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a تشکیل شده است.

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است.

حال با ۶ برابر کردن آن داریم:

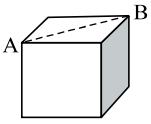
$$۶ \times \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}$$

برای این سؤال: $\frac{۳ \times ۴^۲\sqrt{۳}}{۲} = ۲۴\sqrt{۳}$ = مساحت شش‌ضلعی منتظم

حال حجم هرم را محاسبه می‌کنیم:

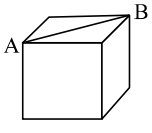
$$\text{هرم } V = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{۳} \times ۲۴\sqrt{۳} \times ۱۰\sqrt{۳} = ۲۴۰$$

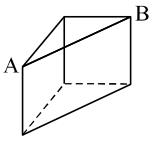
۷۴. یک اسفنج مکعب شکل به ضلع ۵ را در راستای پاره‌خط AB بریده‌ایم. مساحت کلّ یکی از قسمت‌های بریده شده چقدر است؟



۱) ۳۷۵ ۲) ۷۵۰ ۳) $۲۵(۳+\sqrt{۲})$ ۴) $۲۵(۳+۲\sqrt{۲})$

پاسخ: گزینه ۳ شکل برش داده شده را رسم می‌کنیم:





این شکل، ۵ وجه دارد: دو وجه به شکل مثلث در بالا و پایین که هر کدام نصف مساحت وجه مکعب سابق را دارد و دو وجه مربع و یک وجه مستطیل، کافی است طول AB را به دست آوریم باتوجّه به رابطهٔ فیثاغورس.

$$AB^۲ = ۵^۲ + ۵^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۵۰ \Rightarrow AB = \sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲}$$

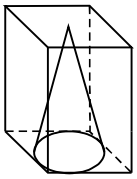
$$\text{مساحت مستطیل} = ۵\sqrt{۲} \times ۵ = ۲۵\sqrt{۲}$$

$$\text{مساحت دو وجه مربع} = ۲ \times ۵ \times ۵ = ۵۰$$

$$\text{مساحت دو وجه مثلث} = \text{مساحت یک مربع} = ۵ \times ۵ = ۲۵$$

$$\Rightarrow \text{مساحت کل} = ۲۵\sqrt{۲} + ۵۰ + ۲۵ = ۷۵ + ۲۵\sqrt{۲} = ۲۵(۳ + \sqrt{۲})$$

۷۵. مخروطی داخل یک مکعب مستطیل طوری قرار گرفته است که قاعدهٔ آن محاط در قاعدهٔ مکعب مستطیل و رأس آن در محل تلاقی قطرهای قاعدهٔ مکعب مستطیل قرار دارد. اگر شعاع قاعدهٔ مخروط r و ارتفاع آن h باشد، حجم فضای بین دو جسم چقدر است؟ $(\pi \simeq ۳)$



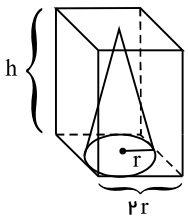
۱) $r^۲h$ ۲) $۲r^۲h$ ۳) $۳r^۲h$ ۴) $۴r^۲h$

پاسخ: گزینه ۳ باتوجه به فرض مسئله قسمت‌های مربوط به ضلع مکعب مستطیل و مخروط را یادداشت می‌کنیم.

حال برای به دست آوردن حجم فضای بین دو جسم حجم مکعب مستطیل را منهای حجم مخروط می‌کنیم.

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir



مکعب مستطیل $V = ۲r \times ۲r \times h = ۴r^۲ h$

مخروط $V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{۳} \times ۳r^۲ h = r^۲ h$

$\Rightarrow$ مکعب مستطیل V − مخروط $V = ۴r^۲ h - r^۲ h = ۳r^۲ h$

۷۶. مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حول ضلع قائمه‌ی کوچک آن دوران می‌دهیم. اگر طول ضلع‌های قائمه ۳ و ۴ باشد. حجم شکل حاصل کدام است؟

۱) ۴۸π ۲) ۱۲π ۳) ۳۶π ۴) ۱۶π

پاسخ: گزینه ۴

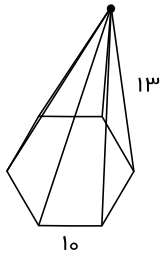
حجم مخروط $= \frac{۱}{۳} \times \pi \times$ شعاع $\times$ شعاع $\times$ ارتفاع $= \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۴^۲ \times ۳ = ۱۶\pi$

۷۷. هرمی ۱۷ وجه دارد. این هرم چند یال دارد؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینه ۴ این هرم یک قاعده‌ی ۱۶ ضلعی دارد پس ۱۶ تا از یال‌هایش رأس هرم را به رأس‌های این ۱۶ ضلعی وصل می‌کنند و ۱۶ یال دیگر هم ضلع‌های قاعده‌اند.

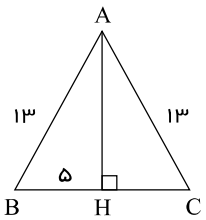
۷۸. مساحت جانبی هرم منتظمی با قاعده‌ی شش ضلعی منتظم به ضلع ۱۰ سانتی‌متر و اندازه‌ی یال ۱۳ سانتی‌متر، کدام است؟



۱) ۱۸۰ سانتی‌متر مربع
۲) ۲۴۰ سانتی‌متر مربع
۳) ۳۶۰ سانتی‌متر مربع
۴) ۳۹۰ سانتی‌متر مربع

پاسخ: گزینه ۳

باید ابتدا ارتفاع هر وجه را بدست آوریم. چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، بنابراین ارتفاع AH میانه است، پس $BH = ۵$



$$AH^۲ = AB^۲ - BH^۲ \rightarrow AH^۲ = ۱۳^۲ - ۵^۲$$
$$= ۱۶۹ - ۲۵ \Rightarrow AH = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$$

مساحت هر مثلث جانبی هرم برابر است با: $\frac{۱۰ \times ۱۲}{۲} = ۶۰$ سانتی‌متر مربع

جانبی کل هرم $S = ۶ \times ۶۰ = ۳۶۰cm^۲$

چون ۶ مثلث جانبی دارد ۶۰ را باید ۶ برابر کنیم.

۷۹. مخروطی به ارتفاع ۳ را با دو صفحه‌ای که موازی قاعده‌اش هستند به سه شکل هم حجم بریده‌ایم. مخروط در چه ارتفاع‌هایی بریده شده است؟

۱) ۱ و ۲ ۲) $۳ - \sqrt[۳]{۱۸}$ ، $۳ - \sqrt[۳]{۹}$ ۳) $\frac{\sqrt[۳]{۳}}{۳}$ ، $\frac{۲\sqrt[۳]{۳}}{۳}$ ۴) نمی‌توان مخروط را این طور برید

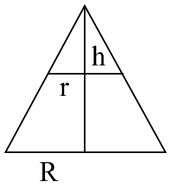
پاسخ: گزینه ۲ بدون کاسته شدن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم که مقطع مخروط دایره است. فرض کنید قاعده‌ی مخروط اصلی R باشد و r شعاع مقطع دایره‌ای که صفحه‌ای موازی قاعده در فاصله‌ی h از رأس مخروط از مخروط جدا می‌کند، باشد.

مطابق شکل زیر $\frac{r}{h} = \frac{R}{۳}$ و در نتیجه $r = \frac{hR}{۳}$ پس حجم مخروط بالایی برابر است با:

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

$$\frac{۱}{۳}\pi(\frac{hR}{۳})^{۲}h$$



اگر بخواهیم این حجم برابر $\frac{۱}{۳}$ کل حجم باشد، باید:

$$\frac{۱}{۳}\pi\times\frac{۱}{۹}h^{۳}R^{۲}=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}\times ۳)\Rightarrow h=\sqrt[۳]{۹}$$

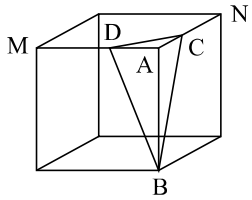
بار دوم مخروط جایی برش می‌خورد که حجم مخروط جداشونده برابر $\frac{۲}{۳}$ حجم کل باشد. یعنی باید:

$$\frac{۱}{۳}\pi\times\frac{۱}{۹}h^{۳}R^{۲}=\frac{۲}{۳}(\frac{۱}{۳}\pi^{۲}\times ۳)$$

$$h=\sqrt[۳]{۱۸}$$

پس اگر از طرف قاعده حساب کنیم ارتفاع‌های برش عبارتند از: $\sqrt[۳]{۹}-۳$ و $\sqrt[۳]{۱۸}-۳$

۸۰. در مکعب زیر نقطه‌ی C وسط AN و نقطه‌ی D وسط AM است. اگر $AB=۱$ باشد، حجم هرم $ABCD$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $\frac{۱}{۱۲}$
۳) $\frac{۱}{۱۸}$
۴) $\frac{۱}{۲۴}$

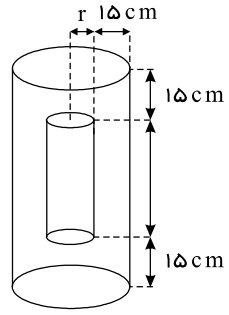
پاسخ: گزینه ۴

برای بدست آوردن حجم هرم، اگر مثلث DAC را قاعده در نظر بگیریم با توجه به اینکه $AD=AC$ و هر کدام نصف وجه‌های مکعب هستند مساحت قاعده از رابطه‌ی روبرو بدست می‌آید:

$$\text{مثلث}=\frac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{۲}=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}{۲}=\frac{۱}{۸}$$

$$V_{\text{هرم}}=\frac{\text{قاعده }S\times\text{ارتفاع}}{۳}=\frac{\frac{۱}{۸}\times ۱}{۳}=\frac{۱}{۲۴}$$

۸۱. یک محفظه برای نگهداری مواد شیمیایی مانند شکل زیر طراحی شده است. محفظه دارای ضخامت $۱۵cm$ می‌باشد. فرض کنید گنجایش محفظه‌ی بیرونی برابر با ۴۳۲ سانتی‌متر مکعب باشد. ارتفاع محفظه‌ی درونی h، به صورت عبارتی گویا برحسب r کدام گزینه است؟



۱) $h=\frac{۴۳۲}{\pi(r+۱۵)^{۲}}+۳۰$
۲) $h=\frac{۴۳۲}{\pi(r+۱۵)^{۲}}-۳۰$
۳) $h=\frac{۴۳۲}{\pi(r+۱۵)}+۳۰$
۴) $h=\frac{۴۳۲}{\pi(r+۱۵)}-۳۰$

پاسخ: گزینه ۲ شعاع قاعده‌ی استوانه‌ی بزرگ برابر $r+۱۵$ و ارتفاع آن برابر $h+۳۰$ است. حجم آن نیز ۴۳۲ است. بنابراین:

$$۴۳۲=\pi R^{۲}h=\pi(r+۱۵)^{۲}\times(h+۳۰)$$

$$h+۳۰=\frac{۴۳۲}{\pi(r+۱۵)^{۲}}\rightarrow h=\frac{۴۳۲}{\pi(r+۱۵)^{۲}}-۳۰$$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۸۲. کره‌ای فلزی و جامد به شعاع ۱۲۸ را با حرارت دادن ذوب و به ۶۴ قطره‌ی کروی شکل کوچک و مساوی تبدیل می‌کنیم. شعاع کره‌ی کوچک چه کسری از شعاع کره‌ی بزرگ است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

کره فلزی و جامد $V=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}=\frac{۴}{۳}\pi\times ۱۲۸^{۳}=\frac{۴}{۳}\pi\times(۲^{۷})^{۳}=\frac{۴\times ۲^{۲۱}\times\pi}{۳}=\frac{۲^{۲}\times ۲^{۲۱}\times\pi}{۳}=\frac{۲^{۲۳}\times\pi}{۳}$

حجم هر قطره‌ی کروی $\frac{۱}{۶۴}$ حجم کره‌ی فلزی و جامد است، بنابراین حجم هر قطره برابر است با:

$$\frac{۲^{۲۳}\times\pi}{۳}\div ۶۴=\frac{۲^{۲۳}\times\pi}{۳}\div ۲^{۶}=\frac{۲^{۱۷}\times\pi}{۳}$$

حال شعاع هر قطره را به دست می‌آوریم:

هر قطره $V=\frac{۲^{۱۷}\times\pi}{۳}=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$

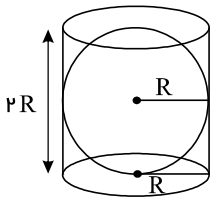
$$r^{۳}=\frac{۲^{۱۷}}{۴}=\frac{۲^{۱۷}}{۲^{۲}}=۲^{۱۵}\rightarrow r=\sqrt[۳]{۲^{۱۵}}=۲^{۵}=۳۲\rightarrow\frac{r}{R}=\frac{۳۲}{۱۲۸}=\frac{۱}{۴}$$

۸۳. کره‌ای در استوانه‌ای محاط شده است، اگر حجم استوانه $۱۲\sqrt{۲}$ سانتی‌متر مکعب باشد، حجم کره کدام است؟ $(\pi=۳)$

۱) $۴\sqrt{۲}cm^{۳}$ ۲) $۶\sqrt{۲}cm^{۳}$ ۳) $۸\sqrt{۲}cm^{۳}$ ۴) $۳۲cm^{۳}$

پاسخ: گزینه ۳

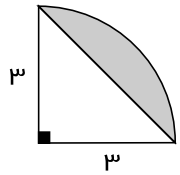
ارتفاع و شعاع قاعده‌ی استوانه به ترتیب برابر $۲R$ و R است.



استوانه $V=\pi(R)^{۲}\times H=۳\times R^{۲}\times ۲R=۶R^{۳}=۱۲\sqrt{۲}\rightarrow R^{۳}=۲\sqrt{۲}$

کره $V=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}=\frac{۴}{۳}\times ۳\times ۲\sqrt{۲}=۸\sqrt{۲}cm^{۳}$

۸۴. حجم قسمت هاشورخورده حول دوران ضلع ۳ سانتی‌متر برابر است با:



۱) ۹π ۲) ۶π ۳) ۳π ۴) ۱۲π

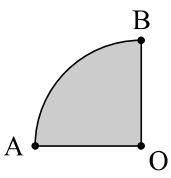
پاسخ: گزینه ۱ شکل حاصل یک نیم‌کره با شعاع ۳ می‌شود که باید یک مخروط به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۳ را از آن کسر کرد.

حجم نیم‌کره $=\frac{۲}{۳}\pi R^{۳}=\frac{۲}{۳}\pi\times ۳^{۳}=\frac{۲\times \cancel{۲۷}^{۹}}{\cancel{۳}^{۱}}\pi=۱۸\pi$

حجم مخروط $=\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h=\frac{۱}{\cancel{۳}^{۱}}\pi(۳)^{۲}\times\cancel{۳}^{۱}=۹\pi$

$\rightarrow V_{\text{هاشور خورده}}=۱۸\pi-۹\pi=۹\pi$

۸۵. ربع دایره مقابل به شعاع r را حول OB دوران می‌دهیم، حجم شکل حاصل چقدر است؟



۱) $\frac{۲\pi r^{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{\pi r^{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}\times\frac{۴\pi r^{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{\pi r^{۳}}{۴}$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

پاسخ: گزینه ۱ نکته: از دوران ربع دایره نیم‌کره حاصل می‌شود.

اگر حول OB دوران بدهیم شکل حاصل یک نیم کره خواهد شد و حجم آن نصف حجم کره است.

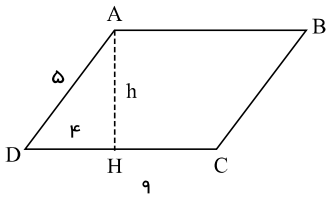
$$\text{حجم نیم‌کره} = \frac{۱}{۲} \text{ حجم کره} = \frac{۱}{\cancel{۲}_{۱}} \times \frac{\cancel{۴}^{۲}}{۳}\pi r^۳ = \frac{۲\pi r^۳}{۳}$$

$$\text{فرمول حجم کره} = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$$

۸۶. متوازی‌الاضلاعی با اندازهٔ اضلاع ۵ و ۹ سانتی‌متر و مساحت ۲۷ سانتی‌متر مربع را حول ضلع بزرگ آن دوران داده‌ایم. حجم شکل حاصل از دوران، برابر چند سانتی‌متر مکعب می‌باشد؟

۱) ۲۷π ۲) ۸۱π ۳) ۲۲۵π ۴) ۲۴۳π

پاسخ: گزینه ۲

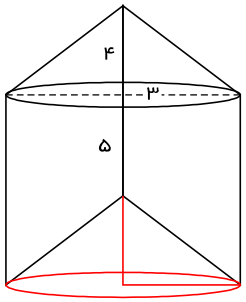


$$S = h \times ۹ = ۲۷$$

$$h = ۳$$

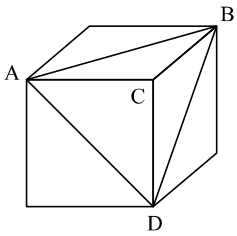
$$AH = ۳ \xrightarrow{\text{فیثاغورث}} DH = ۴$$

مطابق شکل حجم جسم حاصل برابر است با حجم استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۹. پس:



$$V = sh = \pi r^۲ h = \pi \times ۳^۲ \times ۹ = ۸۱\pi$$

۸۷. اگر حجم مکعب مقابل برابر ۴۳۲ واحد باشد، حجم هرم $ABCD$ برابر کدام گزینه است؟



۱) $۳۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳۲\sqrt{۲}$

۳) ۷۲ ۴) ۱۴۴

پاسخ: گزینه ۳ فرض کنیم ضلع مربع a باشد:

$$\text{حجم مکعب} = a^۳ = ۴۳۲$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳}sh = \frac{۱}{۳} \times (\frac{۱}{۲}a^۲) \times a) = \frac{۱}{۶}a^۳ = \frac{۱}{۶} \times ۴۳۲ = ۷۲$$

۸۸. اگر قطر مکعبی $۳a$ باشد، مساحت جانبی آن چه‌قدر است؟

۱) $۳۶\,a^۲$ ۲) $۱۲\,a^۲$ ۳) $۱۸\,a^۲$ ۴) $۶\,a^۲$

پاسخ: گزینه ۲ قطر مکعب $= \sqrt{۳} \times$ ضلع مکعب

پس ضلع مکعب را برحسب a به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{۳} \times \text{ ضلع مکعب} = ۳a \rightarrow \text{ ضلع مکعب} = \frac{۳a}{\sqrt{۳}} = \frac{۳\sqrt{۳}a}{۳} = \sqrt{۳}a$$

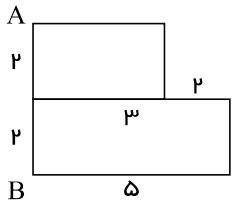
مساحت جانبی مکعب برابر است با:

$$۴ \times (\sqrt{۳}a)^۲ = ۴ \times ۳a^۲ = ۱۲a^۲$$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۸۹. حجم حاصل از دوران شکل زیر حول AB برابر است با: $(\pi = ۳)$



۱) ۱۰۲ ۲) ۲۰۴ ۳) ۴۰۸ ۴) ۱۵۰

پاسخ: گزینه ۲ شکل حاصل دو استوانه هستند که روی هم قرار گرفته اند.

$$V_{\text{استوانه کوچک}} = \pi r^{۲} \times h \xrightarrow{r=۳\ ,\ h=۲} V = ۳ \times ۳^{۲} \times ۲ = ۵۴$$

$$V_{\text{استوانه بزرگ}} = \pi r'^{۲} \times h' \xrightarrow{r'=۵\ ,\ h=۲} V' = ۳ \times ۵^{۲} \times ۲ = ۱۵۰$$

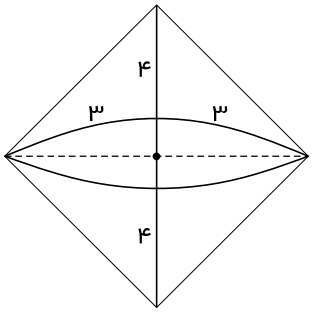
$$\rightarrow V + V' = ۱۵۰ + ۵۴ = ۲۰۴$$

۹۰. یک لوزی به قطرهای ۶ و ۸ را حول قطر ۸ دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟

۱) ۱۲π ۲) ۲۴π ۳) ۳۲π ۴) ۹۶π

پاسخ: گزینه ۲

هنگامی که یک لوزی را حول قطر آن دوران می‌دهیم دو مخروط هم اندازه ایجاد می‌کند مانند شکل رو به رو داریم:



$$V_{\text{شکل}} = ۲ \times \frac{۱}{۳} \times \pi \times (۳)^{۲} \times ۴ = ۲ \times \frac{۱}{۳} \times ۹\pi \times ۴ = ۲۴\pi$$

۹۱. صفحه‌ای موازی قاعدهٔ مخروط رسم می‌کنیم که ارتفاع آن را نصف کند، نسبت حجم هرم مخروط بزرگ به حجم هرم کوچک چه‌قدر است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۳ ابتدا طبق قضیهٔ تالس نسبت شعاع‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h} \xrightarrow{h' = \frac{۱}{۲}h} \frac{r'}{r} = \frac{۱}{۲} \rightarrow r = ۲r'$$

$$\frac{V_{\text{مخروط بزرگ}}}{V_{\text{مخروط کوچک}}} = \frac{\frac{۱}{۳} \times r^{۲}\pi \times h}{\frac{۱}{۳} \times r'^{۲}\pi \times h'} = \frac{(۲r')^{۲} \times ۲h'}{(r')^{۲} \times h'} = \frac{۸r'h'}{r'h'} = ۸$$

۹۲. اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع a، b و c که در آن $a < b < c$ است، را هر بار حول یکی از اضلاعش دوران دهیم، حجم حاصل حول کدام ضلع از بقیه بیشتر است؟

۱) a ۲) b ۳) c ۴) هر سه برابر است.

پاسخ: گزینه ۱ حجم حول هر ضلع را به‌دست آورده و مقایسه می‌کنیم:

حول a: $\frac{۱}{۳} \times b^{۲} \times \pi \times a = \frac{\pi}{۳}ab^{۲} = V_۱$

حول b: $\frac{۱}{۳} \times a^{۲} \times \pi \times b = \frac{\pi}{۳}a^{۲}b = V_۲$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

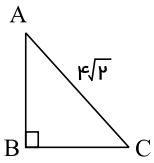
برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

c حول: $\frac{۱}{۳} \times (\frac{ab}{c})^{۲} \times \pi \times c = \frac{\pi}{۳} \times \frac{a^{۲}b^{۲}}{c} = V_{۳}$

تمام حجم‌ها را ضرب در عدد ثابت $\frac{۳c}{\pi}$ می‌کنیم که مقایسه راست‌تر شود:

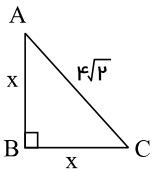
$$\begin{matrix} \frac{۳c}{\pi} \times V_{۱} = ab^{۲}c \\ \frac{۳c}{\pi} \times V_{۲} = a^{۲}bc \\ \frac{۳c}{\pi} \times V_{۳} = a^{۲}b^{۲} \end{matrix} \xrightarrow[\text{را ساده می‌کنیم.}]{\text{عامل‌های مشترک}} \begin{matrix} V'_{۱} = bc \\ V'_{۲} = ac \\ V'_{۳} = ab \end{matrix} \xrightarrow{a<b<c} V_{۳} < V_{۲} < V_{۱}$$

۹۳. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین زیر را حول یکی از اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن دوران می‌دهیم، حجم شکل حاصل چند سانتی‌متر مکعب است؟ (اندازهٔ وتر $۴\sqrt{۲}$ سانتی‌متر است.)



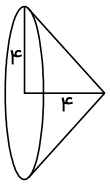
۱) $\frac{۶۴\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۱۲۸\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۳۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۱۶\pi}{۳}$

پاسخ: گزینه ۱ ابتدا بنا بر قضیهٔ فیثاغورس برای مثلث ، اندازهٔ ضلع AB و BC را به دست می‌آوریم.



$$AB^{۲} + BC^{۲} = AC^{۲}$$
$$\Rightarrow x^{۲} + x^{۲} = (۴\sqrt{۲})^{۲} \Rightarrow ۲x^{۲} = ۳۲$$
$$\Rightarrow x^{۲} = ۱۶ \Rightarrow x = ۴$$

شکل حاصل از دوران حول یک ضلع قائم مخروطی به شعاع قاعده و ارتفاع ۴ است. پس:



$$\text{مخروط } V = \frac{۱}{۳}sh = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$$
$$= \frac{۱}{۳}\pi ۴^{۲} \times ۴ = \frac{۶۴}{۳}\pi$$

۹۴. در کدام گزینهٔ زیر، نسبت حجم به مساحت کل بزرگ‌تر از بقیه است؟

۱) مکعب به ضلع a ۲) کره به شعاع a ۳) استوانه به ارتفاع a و شعاع قاعدهٔ a ۴) کره به قطر a

پاسخ: گزینه ۲ بررسی گزینه‌ها:

نسبت حجم به مساحت کل هر کدام از گزینه‌ها را به دست می‌آوریم:

گزینهٔ ۱:

$$\frac{\text{حجم مکعب}}{\text{مساحت کل مکعب}} = \frac{a^{۳}}{۶a^{۲}} = \frac{a}{۶}$$

گزینهٔ ۲:

$$\frac{\text{حجم کره}}{\text{مساحت کل}} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}}{۴\pi a^{۲}} = \frac{a}{۳}$$

گزینهٔ ۳:

$$\frac{\text{حجم استوانه}}{\text{مساحت کل استوانه}} = \frac{\pi a^{۲}a}{۲\pi a \cdot a + ۲\pi a^{۲}} = \frac{\pi a^{۳}}{۲\pi a^{۲} + ۲\pi a^{۲}} = \frac{\pi a^{۳}}{۴\pi a^{۲}} = \frac{a}{۴}$$

گزینهٔ ۴:

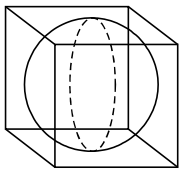
$$\frac{\text{حجم کره با شعاع } \frac{a}{۲}}{\text{مساحت کل با شعاع } \frac{a}{۲}} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi(\frac{a}{۲})^{۳}}{۴\pi(\frac{a}{۲})^{۲}} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi\frac{a^{۳}}{۸}}{۴\pi\frac{a^{۲}}{۴}} = \frac{\frac{a^{۳}}{۶}}{a^{۲}} = \frac{a}{۶}$$

باتوجّه به اینکه $\frac{a}{۶} < \frac{a}{۴} < \frac{a}{۳}$ ، در نتیجه گزینهٔ ۲ درست است.

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۹۵. در شکل مقابل، حجم کرهٔ محاط شده در مکعب برابر ۳۶π می‌باشد. اندازهٔ ضلع مکعب برابر کدام گزینه است؟



۱) ۹
۲) ۶
۳) ۴٫۵
۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

$$\text{حجم کره} = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = ۳۶\pi$$

$$\frac{۴}{۳}r^۳ = ۳۶ \Rightarrow r^۳ = \frac{۳۶}{\frac{۴}{۳}} = \frac{۳۶ \times ۳}{۴} = ۲۷ \Rightarrow r^۳ = ۲۷ \Rightarrow r = ۳$$

و ضلع مکعب دو برابر شعاع کره است، پس:

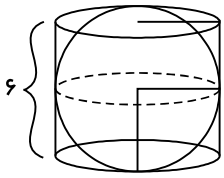
$$۳ \times ۲ = ۶$$

۹۶. کره‌ای در استوانه‌ای به ارتفاع ۶ سانتی‌متر محاط شده است. حجم فضای بین کره و استوانه چند سانتی‌متر مکعب است؟

۱) ۵۴π
۲) ۳۶π
۳) ۱۸π
۴) ۲۷π

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا باتوجه به راهبرد رسم شکل، شکل مناسبی رسم می‌کنیم.



باتوجه به شکل، کره‌ای به شعاع ۳ سانتی‌متر در داخل استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۶ قرار دارد، پس از حجم استوانه، حجم کره را کم می‌کنیم.

$$V_{\text{استوانه}} - V_{\text{کره}} = \pi r^۲ h - \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \pi(۳)^۲(۶) - \frac{۴}{۳}\pi(۳)^۳ = ۵۴\pi - ۳۶\pi = ۱۸\pi$$

۹۷. چه تعداد از عبارت‌های زیر صحیح است؟

- درجهٔ عبارت $-۳ax^۳ + ۵a^۳x^۲b + ۴a^۷$ نسبت به متغیرهای x و a برابر ۵ است.
- عبارت $\frac{۶}{y} - y^۲$ گویا است.
- اگر $a > ۰$ و $b < ۰$ آنگاه $ab < ab^۲$.
- اگر ارتفاع مخروطی را دو برابر کنیم، حجم آن نیز دو برابر می‌شود.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ به بررسی عبارت‌ها می‌پردازیم:

* درجه عبارت $-۳ax^۳ + ۵a^۳ + ۵a^۳x^۲b + ۴a^۷$ نسبت به متغیر a برابر ۷ و نسبت به متغیر x برابر ۳ است، پس درجهٔ این عبارت نسبت به a و x برابر $۳ + ۷ = ۱۰$ است.

* عبارت $\frac{۶}{y} - y^۲$ گویا است، درست است.

* اگر $a > ۰$ و $b < ۰$ آنگاه $ab < ab^۲$، درست است. چون $ab^۲ > ۰$ و $ab < ۰$ است.

* اگر ارتفاع مخروطی را دو برابر کنیم، حجم آن نیز دو برابر می‌شود.

درست است.

$$\text{مخروط } v = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h \xrightarrow{\text{اگر } h \text{ دو برابر شود}} v = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۲}{۳}\pi r^۲ h$$

پس ۳ تا از ۴ عبارت درست است.

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۹۸. یک بادکنک کروی در حال حاضر دارای حجم و مساحتی مساوی است. اگر دهانهٔ بادکنک را باز بگذاریم تا $\frac{۷۶}{۳}\pi$ سانتی‌متر مکعب هوا از داخل بادکنک خارج گردد. با این عمل مساحت بادکنک چند سانتی‌متر مربع کاهش می‌یابد؟

۱) ۲۰π ۲) ۱۶π ۳) ۳۲π ۴) ۶۴π

پاسخ: گزینه ۱ حجم و مساحت بادکنک را با هم برابر در نظر می‌گیریم:

$$V = S \Rightarrow \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = ۴\pi R^۲$$

$$\Rightarrow \frac{R}{۳} = ۱ \Rightarrow R = ۳$$

حجم اوّلیهٔ بادکنک برابر است با:

$$V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \overset{R=۳}{\Rightarrow} V = ۳۶\pi$$

حال حجم باقیماندهٔ بادکنک را پس از باز کردن دهانهٔ آن به دست می‌آوریم:

$$۳۶\pi - \frac{۷۶}{۳}\pi = \frac{۳۲}{۳}\pi$$

حال شعاع کره را بعد از باز کردن دهانهٔ کره به دست می‌آوریم:

$$\frac{۴}{۳}\pi R'^۳ = \frac{۳۲}{۳}\pi$$

$$\Rightarrow R'^۳ = ۸ \Rightarrow R' = ۲$$

حال کافی است مساحت کره‌ای به شعاع ۲ را به دست آوریم:

$$S' = ۴\pi R'^۲ = ۴\pi(۲)^۲ = ۱۶\pi$$

مساحت اوّلیهٔ بادکنک را منهای مساحت ثانویهٔ آن می‌کنیم:

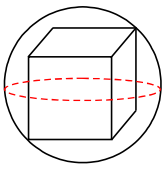
$$۳۶\pi - ۱۶\pi = ۲۰\pi$$

۹۹. مکعبی به ضلع $\sqrt{۱۲}$ درون یک کره محاط شده است. حجم کره چند است؟

۱) $۳۲\sqrt{۳}\pi$ ۲) $۶۴\sqrt{۶}\pi$ ۳) ۲۸۸π ۴) ۳۶π

پاسخ: گزینه ۴

اگر ضلع مکعب برابر a باشد، آنگاه قطر مکعب $\sqrt{۳}a$ است که برابر قطر کره است.



$$\Rightarrow \sqrt{۳}a = ۲R \overset{a=\sqrt{۱۲}}{\Rightarrow} \sqrt{۳} \times \sqrt{۱۲} = ۲R$$

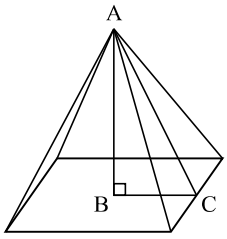
$$\Rightarrow \sqrt{۳۶} = ۲R \rightarrow ۲R = ۶ \rightarrow R = ۳$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۴}{۳}\pi \times ۲۷ = ۳۶\pi$$

۱۰۰. قاعدهٔ یک هرم منتظم مربعی به ضلع ۶ است. اگر وجه‌های این هرم مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، حجم هرم کدام است؟

۱) $۱۸\sqrt{۲}$ ۲) $۲۴\sqrt{۲}$ ۳) $۳۶\sqrt{۲}$ ۴) $۷۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۳

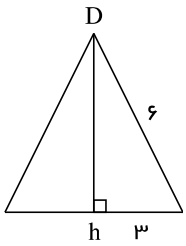


باتوجّه به مثلث قائم‌الزاویه ABC

در شکل ارتفاع این هرم را محاسبه می‌کنیم (البته ابتدا باید ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ را به دست بیاوریم):

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir



$Dh^{۲}+۳^{۲}=۶^{۲}\Rightarrow (Dh)^{۲}=۳۶-۹$

$Dh^{۲}=۲۷\Rightarrow Dh=\sqrt{۲۷}$

حال برای مثلث ABC داریم:

$AB^{۲}+BC^{۲}=(AC)^{۲}$

$AB^{۲}+۳^{۲}=(\sqrt{۲۷})^{۲}\Rightarrow AB^{۲}=۲۷-۹\Rightarrow AB=\sqrt{۱۸}$

حال باتوجّه به رابطهٔ حجم هرم داریم:

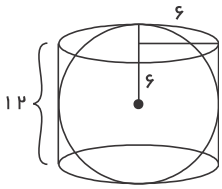
$V_{\text{هرم}}=\frac{۱}{۳}sh=\frac{۱}{۳}\times ۶\times ۶\times \sqrt{۱۸}=۱۲\sqrt{۱۸}=۱۲\sqrt{۹\times ۲}=۳۶\sqrt{۲}$

۱۰۱. کره‌ای را در یک استوانه به ارتفاع ۱۲ سانتی‌متر محاط می‌کنیم. حجم فضای خالی بین کره و استوانه چقدر است؟

۱) ۴۳۲π ۲) ۲۸۸π ۳) ۱۴۴π ۴) ۲۱۶π

پاسخ: گزینه ۳

باتوجّه به شکل برای به دست آوردن حجم فضای خالی بین کره و استوانه کافیست حجم استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۶ و ارتفاع ۱۲ را منهای حجم کره‌ای به شعاع ۶ کنیم.



$\Rightarrow V_{\text{استوانه}}-V_{\text{کره}}=\pi r^{۲}h-\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}=\pi(r^{۲}h-\frac{۴}{۳}r^{۳})$

$\Rightarrow \pi(۶^{۲}\times ۱۲-\frac{۴}{۳}\times ۶^{۳})=۶^{۲}\pi(۱۲-\frac{۴}{۳}\times ۶)$

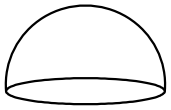
$=۶^{۲}\pi(۱۲-۸)=۶^{۲}\pi(۴)=۱۴۴\pi$

۱۰۲. مساحت کل یک نیم‌کرهٔ توپر ۲۷π است. حجم این نیم‌کره کدام است؟

۱) ۲۷π ۲) ۱۸π ۳) $۳۶\sqrt{۳}\pi$ ۴) ۴۵π

پاسخ: گزینه ۲

مساحت کل یک نیم‌کره برابر با مساحت نصف کره به علاوهٔ مساحت دایرهٔ زیرین آن است.



مساحت دایرهٔ زیرین + مساحت نصف کره = مساحت کل نیم‌کره

$=\frac{۴\pi r^{۲}}{۲}+\pi r^{۲}=۳\pi r^{۲}$

حال مساحت کل نیم‌کره را برابر ۲۷π قرار می‌دهیم.

$۳\pi r^{۲}=۲۷\pi\rightarrow ۳r^{۲}=۲۷\rightarrow r^{۲}=۹\rightarrow r=۳$

حال حجم نیم‌کره را به دست می‌آوریم:

$V_{\text{نیم‌کره}}=\frac{\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}}{۲}=\frac{۲}{۳}\pi r^{۳}=\frac{۲}{۳}\pi r^{۳}=۱۸\pi$

۱۰۳. بزرگترین هرمی که می‌تواند به طور کامل در یک استخر به طول ۲۰ متر و عرض ۱۲ متر و عمق ۴ متر ساخته شود را در نظر بگیرید. حداکثر چه تعداد هرم با حجم این هرم می‌توان درون این استخر ساخت؟

۱) یکی ۲) دو تا ۳) سه تا ۴) چهار تا

پاسخ: گزینه ۳ بزرگترین هرمی که در داخل استخر قرار می‌گیرد، هرمی با قاعده مستطیل شکل به ابعاد ۲۰ و ۱۲ و ارتفاع ۴ متر است. چون حجم هرم، $\frac{۱}{۳}$ حجم منشور با قاعده‌ی مساوی با آن است، بنابراین از این نوع هرم نیز ۳ تا داخل استخر جای می‌گیرد.

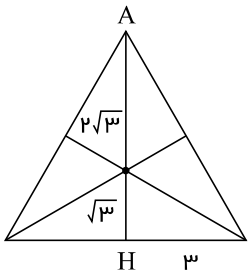
برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۱۰۴ . ارتفاع وارد بر قاعده‌ی هرمی که قاعده‌ی آن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ و اندازه‌ی یال‌های آن نیز ۶ باشد، کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۶}$

پاسخ: گزینه ۴



$$AH^{۲} = ۶^{۲} - ۳^{۲} = ۳۶ - ۹ = ۲۷ \rightarrow AH = \sqrt{۲۷} = \sqrt{۹ \times ۳} = ۳\sqrt{۳}$$

$$x^{۲} = ۶^{۲} - (۲\sqrt{۳})^{۲} = ۳۶ - ۱۲ = ۲۴ \rightarrow x = \sqrt{۲۴}$$

$$\rightarrow \sqrt{۲۴} = \sqrt{۶ \times ۴} = ۲\sqrt{۶} \rightarrow x = ۲\sqrt{۶}$$

۱۰۵ . ارتفاع یک مخروط $۱۲cm$ و شعاع قاعده‌ی آن $۶cm$ است. یک حفره‌ی استوانه‌ای به قطر $۲cm$ در آن ایجاد کردیم به طوری که محور استوانه بر محور مخروط منطبق باشد، حجم جسم باقی‌مانده چقدر است؟

۱) ۱۴۴π سانتی‌متر مکعب ۲) ۱۲۴π سانتی‌متر مکعب ۳) ۱۳۴π سانتی‌متر مکعب ۴) ۴۳۲π سانتی‌متر مکعب

پاسخ: گزینه ۳

$$\frac{\text{جزء } h}{\text{کل } ۱۲} = \frac{۱}{۶} \rightarrow h = \frac{۱۲}{۶} = ۲ \rightarrow \text{ارتفاع استوانه } ۱۲ - ۲ = ۱۰$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}(\pi \times ۶^{۲}) \times ۱۲ = \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۳۶ \times ۱۲ = ۱۴۴\pi$$

$$\text{حجم استوانه} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \pi \times (۱)^{۲} \times ۱۰ = ۱۰\pi$$

$$\text{حجم مخروط} - \text{حجم استوانه} = ۱۴۴\pi - ۱۰\pi = ۱۳۴\pi cm^{۳}$$

۱۰۶ . قاعده‌ی هرمی مربعی است به ضلع $۳cm$، اگر حجم هرم ۲۴ سانتی‌متر مکعب باشد، ارتفاع هرم چند سانتی‌متر است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴

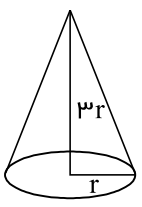
$$\text{حجم} = \frac{\text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۳} \rightarrow \frac{(۳ \times ۳) \times x}{۳} = ۲۴ \rightarrow \frac{\cancel{۹}^{۳} \times x}{\cancel{۳}} = \frac{۲۴}{۱}$$

$$\rightarrow ۳x = ۲۴ \rightarrow x = \frac{۲۴}{۳} = ۸\,cm$$

۱۰۷ . شعاع قاعده‌ی یک مخروط با شعاع یک نیم‌کره مساوی است. اگر ارتفاع مخروط سه برابر شعاع قاعده‌اش باشد، نسبت حجم این مخروط به حجم نیم‌کره کدام گزینه است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲



$$V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi r^{۲} h}{۳} = \frac{\pi r^{۲} \times ۳r}{۳} = \pi r^{۳} \quad , \quad h = ۳r$$

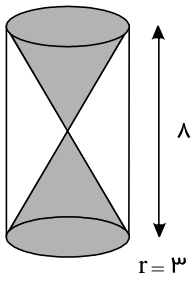
$$V = \frac{\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}}{۲} = \frac{۴\pi r^{۳}}{۶} = \frac{۲}{۳}\pi r^{۳}$$

$$\frac{V \text{ مخروط}}{V \text{ نیم کره}} = \frac{\pi r^{۳}}{\frac{۲}{۳}\pi r^{۳}} = \frac{۳\pi r^{۳}}{۲\pi r^{۳}} = \frac{۳}{۲}$$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۱۰۸. در یک ساعت شنی مطابق شکل، حجم فضایی که توسط شن‌ها اشغال شده است، کدام است؟

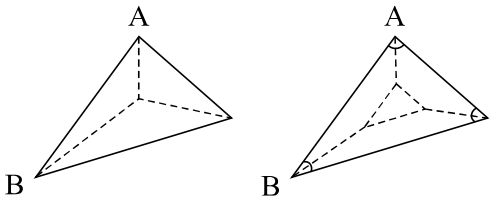


۱) ۱۶π
۲) ۱۲π
۳) ۲۴π
۴) ۴۸π

پاسخ: گزینه ۳ شکل از دو مخروط یکسان به شعاع قاعده‌ی ۳ و هر ارتفاع ۴ تشکیل شده است.

$$\text{مخروط } V = \frac{\pi r^۲ h}{۳} = \frac{\pi \times ۳ \times ۳ \times ۴}{۳} = ۱۲\pi \xrightarrow{\text{هر دو با هم}} ۱۲\pi + ۱۲\pi = ۲۴\pi$$

۱۰۹. هرمی ۶ یال دارد و ۴ گوشه‌ی آن را می‌بریم. شکل جدید چند یال دارد؟



۱) ۲۴
۲) ۱۲
۳) ۱۵
۴) ۱۸

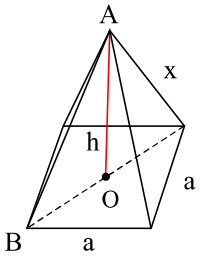
پاسخ: گزینه ۴ با برش زدن هر گوشه‌ی هرم، سه یال به هرم اضافه می‌شود و باتوجه به این‌که ۴ گوشه وجود دارد پس $۳ \times ۴ = ۱۲$ یال به هرم اضافه می‌شود.

$$۱۲ + ۶ = ۱۸$$

۱۱۰. با استفاده از سه هرم مربع‌القاعده متساوی‌الشکل، می‌توانیم یک مکعب به بعد a بسازیم، طول بلندترین یال این هرم کدام است؟

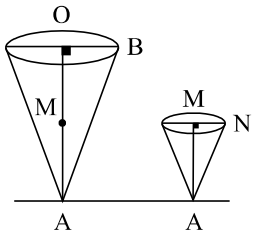
۱) $a\sqrt{۲}$
۲) a
۳) $a\sqrt{۳}$
۴) $۲a\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۳ برای ساختن یک مکعب به وسیله سه هرم مربع‌القاعده یکسان بایستی شکل هرم‌ها به صورت زیر باشند: یال AB بزرگترین یال این هرم است که همان قطر اصلی مکعب می‌باشد. پس داریم:



$$AB = a\sqrt{۳}$$

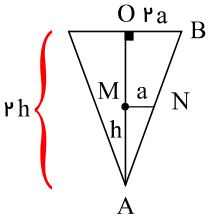
۱۱۱. ظرفی مخروطی مانند شکل زیر داریم، اگر از نقطه‌ی M وسط ارتفاع مخروط موازی با سطح قاعده‌ی مخروط برش بزنیم، حجم مخروط به دست آمده چند برابر مخروط اولیه خواهد بود؟



۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۸}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینه ۳ دو مثلث AMN و AOB متشابه هستند و چون M وسط ضلع OA است، نسبت تشابه آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین شعاع MN نیز نصف شعاع OB است.

اگر $MN = a$ و $AM = h$ باشد، در این صورت $OB = ۲a$ و $AO = ۲h$ است، پس داریم:



$$\text{مخروط کوچک } V = \frac{۱}{۳}\pi a^۲ h$$

$$\text{مخروط بزرگ } V = \frac{۱}{۳}\pi (۲a)^۲ ۲h = \frac{۱}{۳}\pi \times ۸a^۲ h$$

$$\rightarrow \frac{\text{مخروط کوچک } V}{\text{مخروط بزرگ } V} = \frac{\frac{۱}{۳}\pi a^۲ h}{\frac{۱}{۳}\pi a^۲ h \times ۸} = \frac{۱}{۸}$$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۱۱۲. ظرفی به شکل مخروط به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۹ سانتی‌متر را ۶ بار پر از آب کرده و در ظرفی مکعب شکل به ضلع ۹ سانتی‌متر خالی می‌کنیم. آب تا چه ارتفاعی در این مکعب بالا می‌آید؟ $(\pi \simeq ۳)$

۱) ۹ سانتی‌متر ۲) ۶ سانتی‌متر ۳) ۳ سانتی‌متر ۴) ۱ سانتی‌متر

پاسخ: گزینه ۲

$$\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h = \frac{۱}{\cancel{۳}_{۱}} \times \cancel{۳}^{۱} \times (۳)^۲ \times ۹ = ۸۱ cm^۳$$

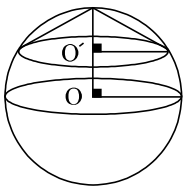
$$\text{حجم آب جابه‌جا شده} = ۶ \times ۸۱ = ۴۸۶\ cm^۳$$

حال کافی است این حجم آب را بر مساحت قاعده‌ی مکعب تقسیم کنیم تا ارتفاع آب به دست آید:

$$\text{مساحت قاعده‌ی مکعب} = ۹ \times ۹ = ۸۱\ cm^۲$$

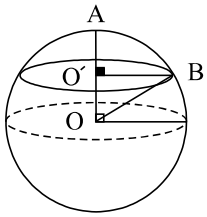
$$\text{ارتفاع آب} = ۴۸۶ \div ۸۱ = ۶\ cm$$

۱۱۳. در شکل زیر شعاع کره R و $OO' = \frac{R}{۳}$ می‌باشد. نسبت حجم کره به حجم مخروط چقدر است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۲۷}{۴}$ ۴) $\frac{۲۷}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳ از O به B وصل می‌کنیم. اندازه‌ی OB مساوی شعاع کره یعنی R است. بنابراین $O'B$ یعنی شعاع قاعده‌ی مخروط را با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث $OO'B$ به دست می‌آوریم.



$$O'B^۲ = OB^۲ - OO'^۲ = R^۲ - (\frac{R}{۳})^۲$$

$$= R^۲ - \frac{R^۲}{۹} = \frac{۹R^۲}{۹} - \frac{R^۲}{۹} = \frac{۸R^۲}{۹}$$

$$\rightarrow O'B = \sqrt{\frac{۸R^۲}{۹}} = \frac{\sqrt{۸}}{۳}R$$

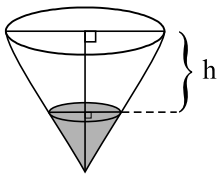
همچنین ارتفاع مخروطی یعنی AO' برابر است با:

$$AO' = AO - OO' = R - \frac{R}{۳} \Rightarrow \frac{۳R - R}{۳} = \frac{۲R}{۳}$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{۱}{۳}\pi(O'B)^۲ \times AO' = \frac{۱}{۳}\pi(\frac{\sqrt{۸}}{۳}R)^۲ \times \frac{۲R}{۳} = \frac{۱}{۳}\pi \times \frac{۸}{۹}R^۲ \times \frac{۲}{۳}R = \frac{۱۶}{۸۱}\pi R^۳$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \rightarrow \frac{V_{\text{کره}}}{V_{\text{مخروط}}} = \frac{\frac{۴}{۳}\cancel{\pi}\cancel{R^۳}}{\frac{۱۶}{۸۱}\cancel{\pi}\cancel{R^۳}} = \frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{۱۶}{۸۱}} \Rightarrow \frac{\cancel{۴}^{۱} \times \cancel{۸۱}^{۲۷}}{\cancel{۳}_{۱} \times \cancel{۱۶}_{۴}} = \frac{۲۷}{۴}$$

۱۱۴. مخزنی به شکل مخروط واژگون شده حاوی مایع مخصوصی است. مقدار h که برابر با فضای خالی بالای مایع است، توسط فرمول $h = ۲۱ - \frac{۷}{۲}r$ برحسب متر محاسبه می‌گردد. r در فرمول مذکور برابر با شعاع مایع برحسب متر است. محیط قاعده‌ی دایره‌ای شکل مخزن برابر است با:



۱) ۹π ۲) ۱۲π ۳) ۱۵π ۴) ۱۸π

پاسخ: گزینه ۲ اگر $h = ۰$ باشد یعنی تمام مخزن از مایع پر شده است:

$$۲۱ - \frac{۷}{۲}r = ۰$$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

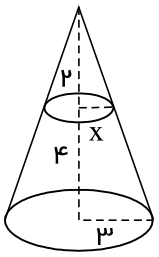
$\frac{۷}{۲}r = ۲۱ \Rightarrow r = ۶m$

محیط قاعده $= ۲\pi r = ۲ \times ۶ \times \pi = ۱۲\pi$

۱۱۵ . مخروطی به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۶ واحد را با صفحه‌ای موازی صفحه قاعده و به فاصله‌ی ۴ واحد از آن، قطع می‌دهیم. حجم مخروط جدا شده کدام است؟

۱) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۲) π ۳) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۴) ۲π

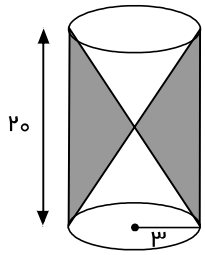
پاسخ: گزینه ۱ ابتدا شعاع مخروط کوچک را به کمک قضیه تالس به دست می‌آوریم:



$$\frac{\text{جزء}}{\text{کل}}\ \frac{۲}{۶} = \frac{x}{۳} \rightarrow x = \frac{۲ \times ۳}{۶} = ۱ \rightarrow V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi r^۲ h}{۳} = \frac{\pi \times ۱^۲ \times ۲}{۳} = \frac{۲}{۳}\pi$$

۱۱۶ . در زمان‌های قدیم برای اندازه‌گیری زمان از ساعت شنی استفاده می‌کردند. ساعت شنی از دو مخروط هم‌اندازه تشکیل شده است که درون یک استوانه قرار دارد. حجم فضای خالی این مخروط‌ها را بیابید. (قسمت رنگی)

(شعاع دایره $= ۳cm$ ، ارتفاع $= ۲۰cm$)



۱) ۱۲۰π ۲) ۱۸۰π
۳) ۶۰π ۴) ۹۰π

پاسخ: گزینه ۱

$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ \times h$

$V = \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۳^۲ \times ۱۰ = \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۹ \times ۱۰ = ۳۰\pi$

حجم ۲ تا مخروط $۳۰\pi \times ۲ = ۶۰\pi$

ارتفاع $\times$ مساحت قاعده $=$ حجم استوانه

حجم استوانه $= \pi r^۲ \times h$

$\pi \times ۳^۲ \times ۲۰ = \pi \times ۹ \times ۲۰ = ۱۸۰\pi$

$\Rightarrow ۱۸۰\pi - ۶۰\pi = ۱۲۰\pi$

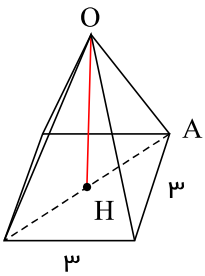
۱۱۷ . حجم هرمی با قاعده‌ی مربع به ضلع $۳cm$ که وجه‌های جانبی آن مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشند، کدام گزینه است؟

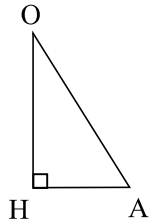
۱) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا ارتفاع هرم را به دست می‌آوریم، مطابق شکل داریم:

اندازه‌ی AH نصف قطر مربع است.





$(\text{قطر مربع})^۲ = ۳^۲ + ۳^۲ = ۱۸ \rightarrow \text{قطر مربع} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$

$AH = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$

همچنین OA برابر ضلع مربع یعنی $۳cm$ است، پس داریم:

$OH^۲ = OA^۲ - HA^۲ \rightarrow OH^۲ = ۳^۲ - (\frac{۳\sqrt{۲}}{۲})^۲$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

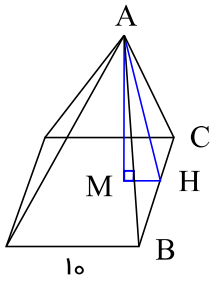
$$۹ - \frac{۱۸}{۴} = \frac{۳۶ - ۱۸}{۴} = \frac{۱۸}{۴} \rightarrow OH = \sqrt{\frac{۱۸}{۴}} = \frac{\sqrt{۱۸}}{\sqrt{۴}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\rightarrow \text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳}(\text{مساحت مربع}) \times OH = \frac{۱}{۳}(۳)^۲ \times \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۱۸. هرم منتظمی داریم که قاعده‌ی آن مربعی به ضلع $۱۰cm$ می‌باشد. اگر مساحت کل این هرم ۳۶۰ سانتی‌متر مربع باشد، حجم این هرم چند سانتی‌متر مکعب است؟

۱) ۲۶۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۴۴۰ ۴) ۴۰۰

پاسخ: گزینه ۴ مساحت کل این هرم شامل ۴ مثلث متساوی‌الساقین و یک مربع است. مساحت مربع برابر است با $۱۰ \times ۱۰ = ۱۰۰cm^۲$ بنابراین مساحت ۴ مثلث اطراف برابر است با:



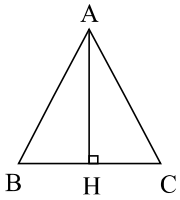
$$۳۶۰ - ۱۰۰ = ۲۶۰cm^۲$$

مساحت هر کدام از مثلث‌ها، مساوی است با: $۲۶۰ \div ۴ = ۶۵cm^۲$

طبق شکل AH ارتفاع وجه برابر ۱۳ سانتی متر، MH نصف ضلع برابر $۵cm$ است. بنابراین می توان از رابطه ی فیثاغورس (MA) ارتفاع هرم را یافت.

$$\text{مساحت } \overset{\triangle}{ABC} = ۶۵ = \frac{BC \times AH}{۲} \quad \text{ارتفاع وجه}$$

$$\rightarrow ۶۵ = \frac{\overset{۵}{\cancel{۱۰}} \times AH}{\underset{۱}{\cancel{۲}}} \rightarrow AH = ۱۳cm$$



$$۱۳^۲ = ۵^۲ + MA^۲ \rightarrow MA^۲ = ۱۴۴ \rightarrow MA = ۱۲$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳}a^۲ \times b = \frac{۱}{۳} \times ۱۰^۲ \times ۱۲ = ۴۰۰cm^۳$$

۱۱۹. هرم منتظمی داریم که قاعده‌ی آن مربعی به ضلع ۶ سانتی‌متر است. اگر مساحت جانبی این هرم ۶۰ سانتی‌متر مربع باشد، حجم این هرم چقدر است؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۲ ۳) ۴۸ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینه ۳ نکته: مساحت جانبی یک هرم برابر است با:

$$\text{جانبی هرم } S = \frac{۱}{۲}(\text{محیط قاعده}) \times (\text{ارتفاع وجه})$$

مربعی به ضلع ۶ سانتی‌متر است. بنابراین محیط آن محیط قاعده برابر است با:

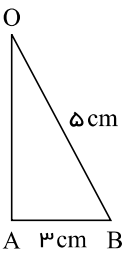
$$۴ \times ۶ = ۲۴cm$$

باتوجه به این که مساحت جانبی برابر $۶۰cm^۲$ است. می‌توان ارتفاع هر وجه را از تساوی زیر به دست آورد:

$$۶۰ = \frac{۱}{۲}(۲۴)(\text{ارتفاع وجه}) \rightarrow \text{ارتفاع وجه} = \frac{۶۰}{۱۲} = ۵cm$$

طبق شکل OB ارتفاع وجه برابر $۵cm$، AB نصف ضلع مربع برابر $۳cm$ است. بنابراین می‌توان با رابطه‌ی فیثاغورس (OA) ارتفاع هرم را یافت:

$$OA^۲ = OB^۲ - AB^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \rightarrow OA = \sqrt{۱۶} = ۴$$



$$\text{هرم } V = \frac{۱}{۳}(\text{قاعده}) \times (\text{ارتفاع})$$

$$= \frac{۱}{\underset{۱}{\cancel{۳}}}(\underset{۲}{\cancel{۶}} \times ۶) \times ۴ = ۴۸cm^۳$$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۱۲۰ . دو مخروط وجود دارند که ارتفاع آنها یکسان و شعاع‌های قاعده‌ی آنها یک واحد اختلاف دارند. اگر اختلاف حجم‌های این دو مخروط 12π باشد و ارتفاع هر یک از آنها به اندازه‌ی شعاع قاعده کوچکتر باشد، شعاع قاعده‌ی مخروط بزرگتر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳ ارتفاع مخروط یعنی h_1 و h_2 برابر شعاع قاعده‌ی مخروط کوچک‌تر یعنی r است. شعاع قاعده‌ی مخروط بزرگتر برابر $r+1$ است. پس داریم:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 \times r = \frac{1}{3}\pi r^3$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi (r+1)^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi (r+1)^2 \times r$$

$$\rightarrow V_2 - V_1 = 12\pi = \frac{1}{3}\underbrace{(r+1)^2}_{(r^2+2r+1)} \times r - \frac{1}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{1}{3}\pi(\cancel{r^3} + 2r + r - \cancel{r^3}) \Rightarrow 12\cancel{\pi} = \frac{1}{3}\cancel{\pi}(2r^2 + r)$$

$$\rightarrow 2r^2 + r = 36 \xrightarrow{\text{با حدس و آزمایش}} r = 4 \rightarrow \begin{cases} r=1 \rightarrow 2\times 1 + 1 \neq 36 \\ r=2 \rightarrow 2\times 2^2 + 2 \neq 36 \\ r=3 \rightarrow 2\times 8 + 3 \neq 36 \\ r=4 \rightarrow 2\times 16 + 4 \neq 36 \checkmark \end{cases}$$

بنابراین شعاع قاعده مخروط بزرگتر برابر ۵ است.

۱۲۱ . از نقطه‌ای روی سقف یک اتاق مکعب شکل، چهار نخ به رأس‌های کف اتاق وصل می‌کنیم. حجم هرم به وجود آمده، چند برابر حجم اتاق خواهد بود؟

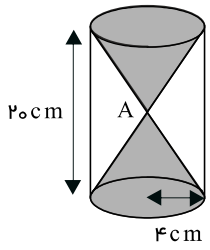
۱) $\frac{1}{3}$ برابر ۲) $\frac{1}{2}$ برابر ۳) $\frac{2}{3}$ برابر ۴) $\frac{1}{4}$ برابر

پاسخ: گزینه ۱ ارتفاع هرم برابر با ضلع مکعب و مساحت قاعده‌ی آن برابر با مساحت مربع است. پس داریم:

$$\text{هرم } V = \frac{1}{3}(S_{\text{مربع}}) \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{3}(\text{ضلع})^2 \times (\text{ضلع}) = \frac{1}{3}(\text{ضلع})^3$$
$$\text{اتاق } V = a^3 = (\text{ضلع})^3$$
$$\Rightarrow \frac{\text{هرم } V}{\text{اتاق } V} = \frac{\frac{1}{3}(\text{ضلع})^3}{(\text{ضلع})^3} = \frac{1}{3}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، حجم هرم $\frac{1}{3}$ حجم مکعب است.

۱۲۲ . در ساعت شنی زیر در هر ثانیه، ۰٫۰۵ سانتی‌متر مکعب شن از منفذ A خارج می‌شود. اگر مخروط بالای ساعت شنی پر باشد، پس از چند ثانیه خالی می‌شود؟



۱) $\frac{320}{3}\pi$ ۲) $\frac{6400}{2}\pi$ ۳) $\frac{3200}{3}\pi$ ۴) $\frac{160}{3}\pi$

پاسخ: گزینه ۳ شعاع قاعده‌ی مخروط برابر ۴ و ارتفاع آن ۱۰ سانتی‌متر است.

$$\text{مخروط } V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \times (4)^2 \times 10 = \frac{160}{3}\pi\, cm^3$$

در هر ثانیه ۰٫۰۵ سانتی‌مترمکعب شن خارج می‌شود باید ببینیم برای خروج $\frac{160\pi}{3}$ سانتی‌مترمکعب چند ثانیه زمان لازم است.

$$\frac{160}{3}\pi \div 0{,}05 = \frac{160}{3}\pi \div \frac{5}{100} = \frac{\overset{32}{\cancel{160}}}{3}\pi \times \frac{100}{\underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{3200}{3}\pi \text{ ثانیه}$$

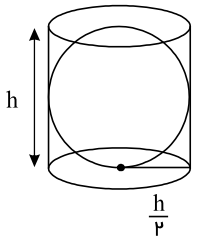
۱۲۳ . یک کره را در یک استوانه به ارتفاع h قرار داده‌ایم. اگر این کره بر وجه جانبی و دو قاعده‌ی استوانه مماس باشد، کدام رابطه درست است؟ (حجم $V =$)

۱) استوانه $V = \frac{4}{3}V$ کره ۲) استوانه $V = \frac{1}{3}V$ کره ۳) استوانه $V = \frac{2}{3}V$ کره ۴) استوانه $V = \frac{1}{2}V$ کره

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

پاسخ: گزینه ۳ باتوجه به شکل می‌توان نتیجه گرفت که شعاع کره و شعاع قاعده‌ی استوانه برابر $\frac{h}{۲}$ است. بنابراین داریم:



$$\text{استوانه } V = \pi R^۲ h = \pi\left(\frac{h}{۲}\right)^۲ h = \pi\left(\frac{h^۲}{۴}\right) h = \frac{\pi}{۴}h^۳$$

$$\text{کره } V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۴}{۳}\pi\left(\frac{h}{۲}\right)^۳ = \frac{۴}{۳}\pi\frac{h^۳}{۸} = \frac{\pi}{۶}h^۳$$

$$\frac{\text{استوانه } V}{\text{کره } V} = \frac{\frac{\pi}{۴}}{\frac{\pi}{۶}} \times \frac{h^۳}{h^۳} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲} \rightarrow \text{کره } V = \frac{۲}{۳}\text{ استوانه } V$$

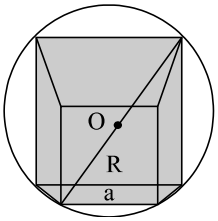
۱۲۴ . در کره‌ای به شعاع R یک مکعب محاط شده است. نسبت حجم این کره به مکعب نام برده کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}\pi$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\pi$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}\pi$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}\pi$

پاسخ: گزینه ۴

قطر کره با قطر مکعب برابر است.

نکته: اندازه‌ی قطر مکعبی به ضلع a برابر است با: $\sqrt{۳}a$ بنابراین داریم:



$$\text{قطر مکعب} = \text{قطر کره} = ۲R = \sqrt{۳}a \rightarrow a = \frac{۲R}{\sqrt{۳}}$$

$$\text{مکعب } V = (\text{ضلع})^۳$$

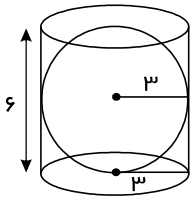
$$\text{حجم مکعب} = \left(\frac{۲R}{\sqrt{۳}}\right)^۳ = \frac{۸R^۳}{۳\sqrt{۳}} \rightarrow \frac{\text{کره } V}{\text{مکعب } V} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi R^۳}{\frac{۸R^۳}{۳\sqrt{۳}}} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi}{\frac{۸}{۳\sqrt{۳}}} = \frac{\cancel{۴}^{۲} \times \cancel{۳}^{۱}\sqrt{۳}\pi}{\cancel{۳}^{۱} \times \cancel{۸}^{۲}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\pi$$

۱۲۵ . کره‌ای در استوانه‌ای به ارتفاع ۶ سانتی‌متر محاط شده است. حجم فضای بین کره و استوانه چند سانتی‌متر مکعب است؟

۱) ۱۸π ۲) ۲۷π ۳) ۳۶π ۴) ۵۴π

پاسخ: گزینه ۱ ارتفاع استوانه برابر قطر کره است. بنابراین شعاع کره و شعاع قاعده‌ی استوانه برابر نصف ارتفاع یعنی ۳ است.

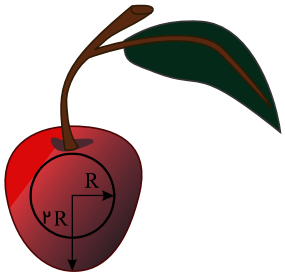
$$\text{حجم استوانه : } \pi R^۲ h = \pi \times (۳)^۲ \times ۶ = ۵۴\pi$$



$$\text{حجم کره : } \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۴}{۳}\pi \times (۳)^۳ = \frac{\cancel{۴}^{۱}}{\cancel{۳}}\pi \times \cancel{۲۷}^{۹} = ۳۶\pi$$

$$\text{حجم فضای بین استوانه و کره} = ۵۴\pi - ۳۶\pi = ۱۸\pi$$

۱۲۶ . می‌توان پذیرفت که ضخامت گوشت یک گیلاس با ضخامت هسته آن برابر است. همچنین می‌توان پذیرفت که گیلاس و هسته‌ی آن هر دو کروی هستند. نسبت حجم گوشت گیلاس به حجم هسته‌ی آن برابر کدام گزینه است؟



۱) ۳
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۲۷

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

پاسخ: گزینه ۲

$$\text{حجم کره کوچک} = \frac{۴}{۳}\pi R^۳$$

شعاع کره بزرگ تر ۲ برابر شعاع کره کوچکتر (هسته گیلاس) می‌باشد.

$$\text{حجم کره بزرگ} = \frac{۴}{۳}\pi(۲R)^۳ = \frac{۴\pi \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times R^۳}{۳} = \frac{۴}{۳} \times ۸\pi R^۳$$

$$\text{حجم گوشت گیلاس} = \text{اختلاف حجم‌ها} = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \times ۸ - \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = ۷ \times \left(\frac{۴}{۳}\pi R^۳\right)$$

$$\text{نسبت حجم‌ها} = \frac{۷ \times \frac{۴}{۳}\pi R^۳}{\frac{۴}{۳}\pi R^۳} = ۷$$

۱۲۷. سه کره داریم که مرکزهایشان هم خط نیستند. حداکثر چند صفحه را می‌توان بر همه‌ی کره‌ها مماس کرد؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) هیچکدام

پاسخ: گزینه ۳

۱۲۸. فرض کنید K رویه‌ی مکعبی به ضلع ۲ است و G رویه‌ای کره‌ای به شعاع r که هم‌مرکز K است. اگر $K \cap G$ دقیقاً از شش دایره تشکیل شده باشد، r در کدام شرط صدق می‌کند؟

۱) $۱ < r \leq \sqrt{۲}$ ۲) $۱ \leq r < \sqrt{۲}$ ۳) $r \leq \sqrt{۲}$ ۴) $۱ < r < \sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۱ شعاع کره باید به اندازه‌ای باشد که از وجه بگذرد پس $r > ۱$ اما در ضمن نباید از ضلع بگذرد پس $r \leq \sqrt{۲}$

۱۲۹. چند کره به شعاع ۱ را باید کنار هم بگذاریم تا جمعشان برابر حجم کره‌ای به شعاع ۲ بشود؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴ نسبت حجم کره‌ها برابر مکعب نسبت شعاع‌ها است که در اینجا برابر است با: $\left(\frac{۲}{۱}\right)^۳ = ۸$

۱۳۰. مکعبی به ضلع ۱ و هشت کره‌ی متمایز به شعاع $\frac{۱}{۲}$ داریم که مرکز هر کدامشان یکی از رأس‌های مکعب است. قطر کره‌ای که مماس خارج این هشت کره است کدام است؟

۱) $\sqrt{۳} - ۱$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲} - ۱$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱ قطر مکعب برابر است با $\sqrt{۳}$ و مرکز کره‌ی مطلوب همان مرکز مکعب است. پس قطر کره برابر است با:

$$\sqrt{۳} - ۲ \times \frac{۱}{۲} = \sqrt{۳} - ۱$$

۱۳۱. کره‌ای به شعاع ۳ را در نظر بگیرید که مرکزش بر مبدأ مختصات دکارتی منطبق است. چند نقطه روی سطح این کره هستند که همه‌ی مختصاتشان عددی صحیح است؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۹ ۳) ۱۲ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱ دنبال سه تایی‌های (x, y, z) می‌گردیم که $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۳^۲$ و واضح است که x و y و z باید از عددهای ۰ و ± ۱ و ± ۲ و ± ۳ انتخاب شوند. به این ترتیب یکی از این سه متغیر می‌تواند ± ۳ باشد و دو تای دیگر صفر، یا انتخابی از ± ۱ و ± ۲ و ± ۳. بنابراین تعداد کل حالت‌های ممکن برابر است با: $۲ \times ۳ + ۳ \times ۲^۳ = ۳۰$

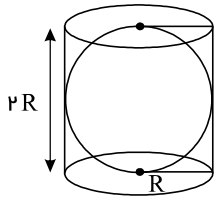
۱۳۲. در نوعی دستگاه صنعتی با حجم ترکیبی، استوانه‌ای بر یک کره محیط شده است. نسبت حجم کره به حجم استوانه چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۱ طبق شکل، شعاع کره و شعاع قاعده‌ی استوانه برابر R است. همچنین ارتفاع استوانه برابر $۲R$ است.

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir



کره $V=\frac{۴}{۳}\pi R^۳$

استوانه $V=\pi R^۲ h=\pi R^۲\times ۲R=۲\pi R^۳$

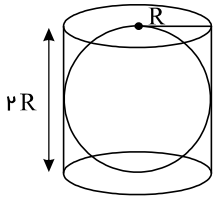
$$\rightarrow \frac{\text{کره } V}{\text{استوانه } V}=\frac{\frac{۴}{۳}\pi R^۳}{۲\pi R^۳}=\frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{۲}{۱}}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

۱۳۳ . کره‌ای داخل استوانه‌ای محاط شده است. اگر حجم فضای بین کره و استوانه ۱۸π باشد، شعاع و حجم کره به ترتیب برابر است با:

۱) $(۳۶\pi, ۳)$ ۲) $(۱۸\pi, ۳)$ ۳) $(۷۲\pi, ۶)$ ۴) $(۳۶\pi, ۶)$

پاسخ: گزینه ۱ شعاع کره و شعاع قاعده‌ی استوانه را R در نظر می‌گیریم. بنابراین ارتفاع استوانه $۲R$ می‌شود:

استوانه $V=\pi R^۲ h=\pi R^۲\times ۲R=۲\pi R^۳$



کره $V=\frac{۴}{۳}\pi R^۳$

حجم فضای بین کره و استوانه $=$ حجم استوانه $V-$ حجم کره V

$$=۲\pi R^۳-\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\pi R^۳(۲-\frac{۴}{۳})=\pi R^۳(\frac{۶-۴}{۳})=\pi R^۳\left(\frac{۲}{۳}\right)=\frac{۲}{۳}\pi R^۳$$

فضای بین کره و استوانه طبق صورت مسأله برابر ۱۸π است. $\leftarrow \frac{۲}{۳}\pi R^۳=۱۸\pi$

$$\rightarrow R^۳=\frac{۱۸}{\frac{۲}{۳}}\rightarrow R^۳=\frac{۵۴}{۲}=۲۷=۳^۳\rightarrow R=۳\rightarrow \text{کره } V=\frac{۴}{۳}\pi\times ۳^۳=\frac{۴}{۱}\pi\times ۲۷^{۹}=۳۶\pi$$

۱۳۴ . یک نیم‌کره‌ی چوبی توپُر را به طور کامل رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. مساحت کل قسمت رنگ شده ۱۲۰ سانتی‌متر مربع شده است. اگر بخواهیم کره‌ای با همان شعاع نیم‌کره را به طور کامل رنگ‌آمیزی کنیم، مساحت رنگ شده در این حالت چند سانتی‌متر مربع خواهد بود؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۲۰ ۴) ۳۶۰

پاسخ: گزینه ۱ نکته: مساحت یک نیم‌کره توپُر به شعاع R برابر است با: $۳\pi R^۲$

$$۳\pi R^۲=۱۲۰\rightarrow R^۲=\frac{۱۲۰^{۴۰}}{۳\pi}=\frac{۴۰}{\pi}\rightarrow R=\sqrt{\frac{۴۰}{\pi}}\,cm$$

$$\text{مساحت کره با شعاع } R=۴\pi R^۲=۴\times\pi\left(\sqrt{\frac{۴۰}{\pi}}\right)^۲=۴\times\frac{۴۰}{}=۱۶۰cm^۲$$

۱۳۵ . دو کره داریم که شعاع یکی، ۲ برابر دیگری است. اگر کره کوچک را داخل کره بزرگ قرار دهیم، حجم فضای بین دو کره، چه کسری از حجم کره بزرگ‌تر است؟

۱) $\frac{۷}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱ شعاع کره‌ی کوچک را R و شعاع کره‌ی بزرگ را $۲R$ در نظر می‌گیریم:

فضای بین دو کره $=$ حجم کره‌ی بزرگتر $-$ حجم کره‌ی کوچکتر

فضای بین دو کره $V=\frac{۴}{۳}\pi(۲R)^۳-\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\frac{۴}{۳}\pi\times ۸R^۳-\frac{۴}{۳}\pi R^۳$

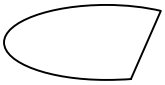
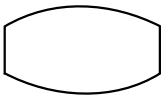
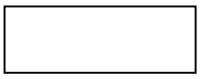
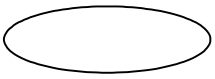
$$=\frac{۳۲}{۳}\pi R^۳-\frac{۴}{۳}\pi R^۳=\pi R^۳(\frac{۳۲}{۳}-\frac{۴}{۳})=\frac{۲۸}{۳}\pi R^۳$$

$$\frac{\text{فضای بین دو کره } V}{\text{حجم کره‌ی بزرگتر } V}=\frac{\frac{۲۸}{۳}\pi R^۳}{\frac{۳۲}{۳}\pi R^۳}=\frac{۲۸}{۳۲}=\frac{۷}{۸}$$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

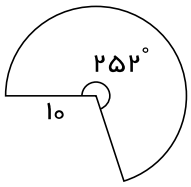
برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

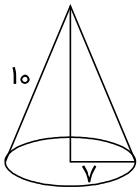
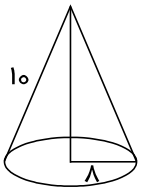
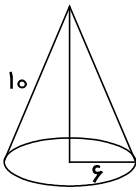
۱۳۶ . مقداری آب را در استوانه‌ای که سر و ته آن بسته است، ریخته‌ایم. با حرکت دادن این استوانه در جهات مختلف، سطح آب به کدام شکل نمی‌تواند باشد؟ (به صورت مستقیم و از بالا به سطح آب نگاه کرده‌ایم.)

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

پاسخ: گزینه ۱ به سادگی و تجسم می‌تواند گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ را تشکیل داد.

۱۳۷ . برای ساختن مخروط از شکل مقابل دو شعاع را روی هم قرار می‌دهیم. کدام مخروط زیر حاصل می‌شود؟



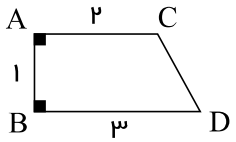
۱) 
۲) 
۳) هیچکدام
۴) 

پاسخ: گزینه ۱ ۲۵۲ درجه یعنی ۰٫۷ از محیط دایره پس محیط دایره را حساب کرده و در ۰٫۷ ضرب می‌کنیم:

$$\text{محیط} = \text{قطر} \times \pi \rightarrow \text{محیط مکانی} = ۲۰ \times \pi \times ۰/۷ = ۱۴\pi$$

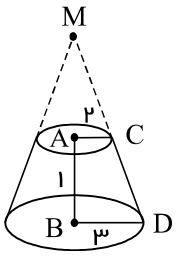
$$۱۴\pi = x\pi \rightarrow x = ۱۴ \rightarrow \text{شعاع} = ۷ \text{ : محاسبه‌ی شعاع قاعده‌ی مخروط}$$

۱۳۸ . حجم حاصل از دوران ذوزنقه حول ضلع AB چقدر می‌شود؟



۱) $\frac{۸}{۳}\pi$
۲) ۸π
۳) $\frac{۱۹}{۳}\pi$
۴) ۳π

پاسخ: گزینه ۳ حجم حاصل، مخروط ناقص می‌باشد، یعنی یک مخروط بزرگ که مخروط کوچکی از آن کم شده است.



$$\frac{MA}{MB} = \frac{AC}{BD}$$

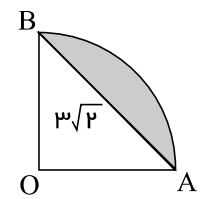
$$\frac{x}{x+۱} = \frac{۲}{۳} \rightarrow ۳x = ۲(x+۱) \rightarrow ۳x = ۲x + ۲$$

$$\rightarrow ۳x - ۲x = ۲ \rightarrow x = ۲$$

$$V = \frac{\pi r^۲ h}{۳} \begin{cases} \xrightarrow{\text{مخروط بزرگ}} V_۱ = \frac{\pi \times ۳^۲ \times ۳}{۳} = ۹\pi \\ \xrightarrow{\text{مخروط کوچک}} V_۲ = \frac{\pi \times ۲^۲ \times ۲}{۳} = \frac{۸\pi}{۳} \end{cases}$$

$$V_{\text{شکل}} = V_۱ - V_۲ = ۹\pi - \frac{۸\pi}{۳} = \frac{۲۷\pi - ۸\pi}{۳} = \frac{۱۹\pi}{۳}$$

۱۳۹ . ربع دایره مقابل را حول OA دوران می‌دهیم، اگر وتر AB برابر $۳\sqrt{۲}$ باشد، حجم شکل حاصل از دوران قسمت رنگی کدام است؟



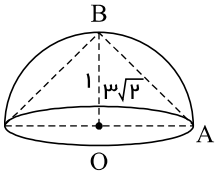
۱) ۹π
۲) ۶π
۳) ۳π
۴) ۱۲π

پاسخ: گزینه ۱ اگر شکل را دوران دهیم به یک نیم‌کره می رسیم که شعاع آن طبق فیثاغورس برابر ۳ است.

$$OB = OA \rightarrow (OB)^۲ + (OA)^۲ = (AB)^۲ \rightarrow ۲(OA)^۲ = (۳\sqrt{۲})^۲ \rightarrow OA = ۳$$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

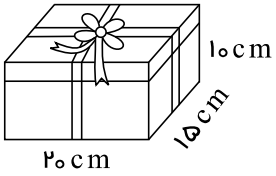


$$\text{حجم نیم‌کره} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi r^۳}{۲} = \frac{\frac{۴}{۳} \times \pi \times ۳ \times ۳ \times ۳}{۲} = ۱۸\pi$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{\pi r^۲ h}{۳} = \frac{\pi \times ۳ \times ۳ \times ۳}{۳} = ۹\pi$$

$$\text{حجم رنگی} = \text{حجم نیم‌کره} - \text{حجم مخروط} = ۱۸\pi - ۹\pi = ۹\pi$$

۱۴۰ . یک هدیه‌ی تولد به وسیله‌ی روبان به شکلی که نشان داده‌ایم گره خورده است. پاپیون، گره‌ها و انتهای روبان ۴۷ سانتی‌متر است. طول کل روبان استفاده شده چقدر است؟ (برحسب سانتی‌متر)



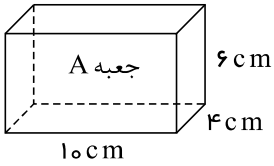
۱) ۱۵۷
۲) ۱۶۷
۳) ۱۷۹
۴) ۱۳۷

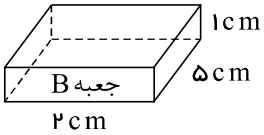
پاسخ: گزینه ۱ باتوجه به شکل ۲ تا طول جعبه، ۲ تا عرض و ۴ تا ارتفاع داریم یعنی:

$$۲(۲۰) + ۲(۱۵) + ۴(۱۰) = ۱۱۰$$

$$\text{طول کل روبان} = ۱۱۰ + ۴۷ = ۱۵۷cm$$

۱۴۱ . چند تا جعبه مثل جعبه‌ی B در جعبه‌ی A جا می‌شود؟





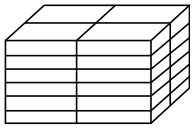
۱) ۲۴
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۵

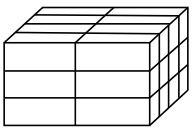
پاسخ: گزینه ۱

دو روش برای چیدن جعبه‌ها وجود دارد:

۱) ۶ طبقه در هر طبقه ۴ جعبه ۲) ۳ طبقه و در هر طبقه ۸ جعبه

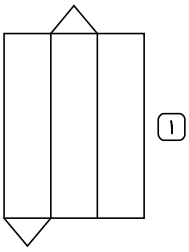
هم روش دیگر این است که حجم جعبه‌ی A بر حجم جعبه‌ی B تقسیم شود.

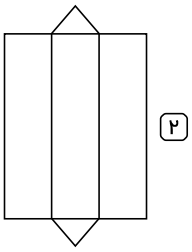


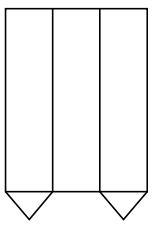


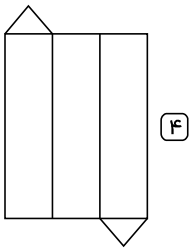
$$A \text{ حجم } V_A = ۱۰ \times ۴ \times ۶ = ۲۴۰\ cm^۳$$
$$B \text{ حجم } V_B = ۵ \times ۲ \times ۱ = ۱۰\ cm^۳$$
$$\rightarrow \frac{A \text{ حجم}}{B \text{ حجم}} = \frac{۲۴۰}{۱۰} = \text{عدد } ۲۴$$

۱۴۲ . کدام شکل زیر منشور مثلث القاعده تشکیل نمی‌دهد؟

۱) 

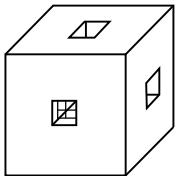
۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه ۳ زیرا در این گزینه یک طرف قاعده ندارد.

۱۴۳ . مکعبی به ضلع $۳m$ همانطور که در شکل معلوم است دارای سوراخ مربعی شکل به ضلع ۱ در وسط هر وجه می‌باشد. سه سوراخ در وسط مکعب طوری برخورد می‌کنند که مکعبی در وسط مکعب ایجاد می‌شود. مساحت کل مکعب به متر مربع برابر است با:



۱) ۷۲
۲) ۷۶
۳) ۷۸
۴) ۸۰

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

پاسخ: گزینه ۱ مساحت بیرونی هر وجه مکعب برابر است با: $۳ \times ۳ = ۹$ اما یک مربع ۱×۱ از آن کم می‌شود $۹ - ۱ = ۸cm^۲$ پس مساحت ۶ وجه مکعب برابر است با: $۶ \times ۸ = ۴۸m^۲$

از هر وجه یک سوراخ مربع شکل ایجاد شده و دور تا دور این سوراخ ۴ مربع ۱×۱ وجود دارد.

$۴ \times ۶ \times ۱ \times ۱ = ۲۴$

مساحت کل $= ۴۸ + ۲۴ = ۷۲$

۱۴۴. یک شرکت جعبه‌های مکعب شکل می‌سازد. حجم کل جعبه برابر است با $۶۴۰cm^۳$ و ارتفاع هر کدام $۱۰cm$ است. اگر هزینه‌ی رنگ کردن برای هر سانتی‌متر مربع ۱۵ دلار باشد، هزینه‌ی رنگ‌آمیزی یک مکعب چند دلار است؟

۱) ۶۴۰۰ ۲) ۶۷۲۰ ۳) ۷۰۴۰ ۴) ۶۰۲۰

پاسخ: گزینه ۲

حجم $= x^۲ \times ۱۰ = ۶۴۰ \rightarrow x^۲ = ۶۴ \Rightarrow x = ۸cm$

مساحت کل $= ۲x^۲ + ۴(۱۰x) = ۱۲۸ + ۳۲۰ = ۴۴۸cm^۲$

هزینه‌ی رنگ آمیزی یک مکعب $= ۴۴۸ \times ۱۵ = ۶۷۲۰$

۱۴۵. ۱۵ مکعب $۱cm^۳$ به رنگ آبی و ۱۶ مکعب $۱cm^۳$ زرد و ۳۳ مکعب $۱cm^۳$ سیاه را به هم چسبانده‌ایم تا یک مکعب بزرگ تشکیل شود. کمترین تعداد مکعب‌های سیاه را در سطوح بیرونی مکعب چند تاست؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۴ ۳) ۲۶ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینه ۳ مکعب‌هایی که در گوشه قرار می‌گیرند هر سه وجه‌شان و مکعب‌های روی یال دو وجه آن‌ها قابل دیدن است. ۴ تا از مکعب‌های وسط هر وجه، فقط یک وجه قابل دیدن دارند. بنابراین ۸ تا از مکعب‌های سیاه را در وسط مکعب قرار می‌دهیم که هیچ وجهی از آن‌ها دیده نشود. در هر وجه ۴ مکعب وسط را سیاه قرار می‌دهیم $۸ + ۴ \times ۶ = ۳۲$

یک مکعب سیاه می‌ماند که آن را روی یال می‌گذاریم که دو وجه آن دیده می‌شود

تعداد سطوح سیاه بیرونی : $(۴ \times ۶) + (۲ \times ۱) = ۲۶$

۱۴۶. جمع طول لبه‌های یک مکعب مستطیل $۶۸cm$ است. اگر طول اضلاع اعداد صحیح و مساحت قاعده $۱۸cm^۲$ باشد، به این ترتیب حجم‌های ممکن برای مکعب مستطیل کدام است؟

۱) ۵۴ و ۷۲ ۲) ۱۰۸ و ۷۲ ۳) ۲۷ و ۱۴۴ ۴) ۱۰۸ و ۱۴۴

پاسخ: گزینه ۴ اگر طول و عرض و ارتفاع مکعب مستطیل را با a و b و c نشان دهیم:

$۴(a + b + c) = ۶۸ \Rightarrow a + b + c = ۱۷$

$ab = ۱۸ \Rightarrow a = ۲, b = ۹$
یا $a = ۳, b = ۶$

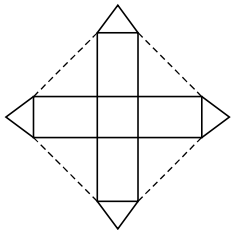
مقدار $a = ۱۸$ و $b = ۱$ قابل قبول نیست چون جمع $a + b + c$ از ۱۷ بزرگتر می‌شود. طبق مقادیر a و b مقدار c می‌تواند ۶ و یا ۸ باشد.

حجم‌های ممکن : $۲ \times ۹ \times ۶ = ۱۰۸$
$۳ \times ۶ \times ۸ = ۱۴۴$

۱۴۷. می‌خواهیم از قطعه کاغذی مربعی به ابعاد $n \times n$، مکعبی به ضلع ۲ در بیاوریم. کوچکترین مقدار ممکن برای n چند است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینه ۳

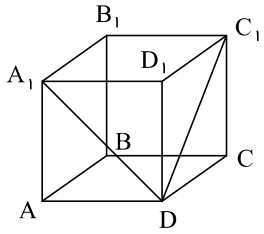


الگوی مکعب را به شکل مقابل در نظر بگیرید. به این ترتیب، مربعی به ضلع $۴\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲} + \frac{۱}{۲} \times ۲\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲}$ برای ساختن مکعب کافی است. کوچکترین عدد طبیعی کمتر از $۴\sqrt{۲}$ برابر است با ۶.

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۱۴۸ . زاویه بین دو قطر A_1D و DC_1 از مکعب $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ چقدر است؟



۱) ۶۰°
۲) ۸۰°
۳) ۴۵°
۴) ۷۵°

پاسخ: گزینه ۱ توجه کنید که مثلث A_1DC_1 متساوی‌الاضلاع است.

۱۴۹ . علی تعداد زیادی مکعب مستطیل با ابعاد $۳\times۲\times۱$ دارد. کمترین تعداد مکعب مستطیل‌هایی که برای ساختن یک مکعب توپر لازم دارد چند تاست؟

۱) ۱۲۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

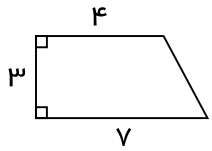
پاسخ: گزینه ۴ ابعاد آن مکعب باید کوچکترین مضرب مشترک اعداد ۱ و۲ و ۳ باشد. بنابراین طول این مکعب ۶ و حجم آن ۲۱۶ است. از طرف دیگر حجم مکعب مستطیل $۳\times۲\times۱=۶$ می‌باشد بنابراین تعداد مکعب مستطیل‌های لازم برابر است با: $۲۱۶\div۶=۳۶$

۱۵۰ . هلیا ۵ تا مکعب دارد و ۳ تا چهاروجهی. این حجم‌ها روی هم چند وجه دارند؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۸ ۳) ۵۰ ۴) ۵۲

پاسخ: گزینه ۱ هر مکعب ۶ وجه و هر چهار وجهی ۴ وجه دارد. این حجم‌ها روی هم $۳\times۴+۶\times۵=۴۲$ وجه دارند.

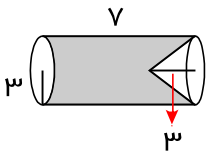
۱۵۱ . اگر یک ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه را با اندازه‌ی اضلاع مشخص شده در شکل زیر، حول قاعده‌ی کوچک‌تر دوران دهیم، حجم شکل حاصل را به دست آورید.



۱) ۳۶π ۲) ۴۵π
۳) ۵۴π ۴) ۶۰π

پاسخ: گزینه ۳ شکل حاصل یک استوانه به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۷ است که یک مخروط به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۳ از آن کم شده است.

$$\left.\begin{aligned} V_{\text{استوانه}} &= \pi R^۲ h = \pi\times ۳^۲ \times ۷ = ۶۳\pi \\ V_{\text{مخروط}} &= \tfrac{۱}{۳}\pi R^۲ h = \tfrac{۱}{۳}\pi\times ۳^۲ \times ۳ = ۹\pi \end{aligned}\right\}$$

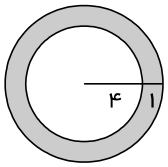


$\rightarrow V_{\text{کل}} = V_{\text{استوانه}} - V_{\text{مخروط}} = ۶۳\pi - ۹\pi = ۵۴\pi$

۱۵۲ . یک ظرف چوبی توخالی به شکل نیم‌کره داریم که قطر خارجی آن $۱۰cm$ و ضخامت آن $۱cm$ است. می‌خواهیم سطح کل این ظرف را رنگ کنیم. اگر برای هر متر مربع، به ۱۰۰ گرم رنگ نیاز باشد، چند گرم رنگ مصرف می‌شود؟ $(\pi\simeq ۳)$

۱) ۷٫۲۴ ۲) ۲۲٫۲۹ ۳) ۷٫۴۳ ۴) ۲٫۷۳

پاسخ: گزینه ۴ قسمت‌هایی که باید رنگ شوند، شامل سطح یک نیم‌کره بیرونی به شعاع ۵ سانتی‌متر، سطح یک نیم‌کره داخلی با شعاع ۴ سانتی‌متر و ضخامت ظرف که شکلی مانند شکل روبرو دارد:



مساحت نیم‌کره‌ی بیرونی $= ۲\pi R^۲ = ۲\times ۳\times ۵^۲ = ۱۵۰cm^۲$

مساحت نیم‌کره‌ی داخلی $= ۲\pi R'^۲ = ۲\times ۳\times ۴^۲ = ۹۶cm^۲$

مساحت شکل بالایی $= (\pi\times ۵)^۲ - (\pi\times ۴^۲) = ۲۵\pi - ۱۶\pi = ۹\pi = ۹\times ۳ = ۲۷cm^۲$

کل مساحت رنگ شده $= ۱۵۰ + ۹۶ + ۲۷ = ۲۷۳cm^۲ = ۰٫۰۲۷۳m^۲$

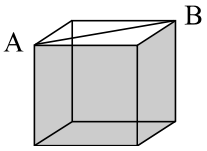
میزان رنگ مصرفی $= ۱۰۰\times ۰٫۰۲۷۳ = ۲٫۷۳$ گرم

که در بین گزینه‌ها موجود نیست.

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۱۵۳ . یک اسفنج مکعب شکل به ضلع $۳b$ را در راستای پاره‌خط AB بریده‌ایم، مساحت کل یکی از قسمت‌های ایجاد شده چقدر است؟



۱) $۳\sqrt{۲}b^۲$ ۲) $(۱۸\sqrt{۲}+۵۴)b^۲$

۳) $۲۷b^۲$ ۴) $(۲۷+۹\sqrt{۲})b^۲$

پاسخ: گزینه ۴ شکل جدید از ۲ وجه مربع به ضلع $۳b$، یک وجه مستطیل شکل به طول AB و عرض $۳b$ و همچنین دو مثلث قائم‌الزاویه به ضلع‌های قائمه $۳b$ تشکیل می‌شود.

ابتدا طول AB را به دست می‌آوریم:

$$(AB)^۲=(۳b)^۲+(۳b)^۲=۹b^۲+۹b^۲=۱۸b^۲\rightarrow AB=\sqrt{۱۸}b$$

$$\text{مساحت وجه مستطیل}=۳\sqrt{۲}b\times ۳b=۹\sqrt{۲}b^۲$$

$$\text{مساحت‌های دو وجه مربعی}=۲\times ۳b\times ۳b=۱۸b^۲$$

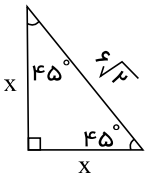
$$\text{مساحت‌های دو وجه مثلثی}=۲\times\frac{۳b\times ۳b}{۲}=۹b^۲$$

$$\text{مساحت کل شکل}=۹\sqrt{۲}b^۲+۱۸b^۲+۹b^۲=۹\sqrt{۲}b^۲+۲۷b^۲=b^۲(۹\sqrt{۲}+۲۷)$$

۱۵۴ . اندازه‌ی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین $۶\sqrt{۲}$ است. اگر این مثلث را حول یک ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن دوران دهیم حجم حاصل از این دوران چقدر است؟

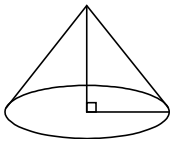
۱) ۳۶π ۲) ۷۲π ۳) ۱۴۴π ۴) ۲۱۶π

پاسخ: گزینه ۲ در مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین دو ساق برابرند و دو زاویه ۴۵ درجه هم دارد.



$$(\text{ضلع})^۲+(\text{ضلع})^۲=(\text{وتر})^۲\rightarrow x^۲+x^۲=\underbrace{(۶\sqrt{۲})^۲}_{۳۶\times ۲=۷۲}$$

$$\rightarrow ۲x^۲=۷۲\rightarrow x^۲=۳۶\rightarrow x=\sqrt{۳۶}=۶$$



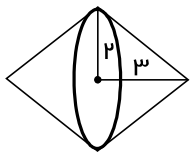
$$\text{حجم مخروط}=\frac{۱}{۳}\times\text{مساحت قاعده}\times\text{ارتفاع}=\frac{۱}{۳}\pi\times(۶)^۲\times ۶$$

$$=\frac{۱}{۳}\times\pi\times ۲۱۶=\frac{۲۱۶\pi}{۳}=۷۲\pi$$

۱۵۵ . یک لوزی با قطرهای ۶ و ۴ را حول قطر بزرگش دوران می‌دهیم. حجم حاصل از این دوران برابر است با:

۱) ۸π ۲) ۴π ۳) ۱۶π ۴) ۱۲π

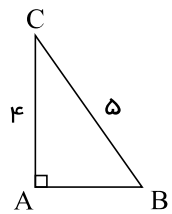
پاسخ: گزینه ۱ دو مخروط یکسان با شعاع قاعده‌ی ۲ و ارتفاع ۳ تشکیل می‌شود.



$$V_{\text{مخروط}}=\frac{\pi r^۲h}{۳}=\frac{\pi\times ۲\times ۲\times ۳}{۳}=۴\pi$$

$$\rightarrow \text{هر دو مخروط}\ V=۲\times ۴\pi=۸\pi$$

۱۵۶ . شکل زیر را یک بار حول ضلع AB و بار دیگر حول ضلع AC دوران می‌دهیم. اختلاف حجم دو مخروط حاصل کدام است؟



۱) ۴π ۲) ۶π

۳) ۲π ۴) ۸π

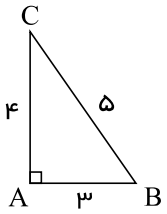
پاسخ: گزینه ۱

$$AB^۲=۵^۲-۴^۲\rightarrow AB^۲=۲۵-۶=۹\rightarrow AB=\sqrt{۹}=۳$$

دوران حول ضلع AB یعنی ارتفاع $۳cm$ و شعاع $۴cm$ می‌باشد.

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir



$$\text{حجم} = \frac{۱}{۳} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

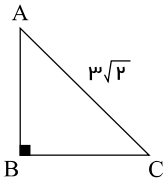
$$V_۱ = \frac{۱}{۳} \times (\pi \times ۴^۲) \times ۳ = \frac{۱}{۳}\pi \times ۱۶ \times ۳ = ۱۶\pi$$

دوران حول ضلع AC یعنی ارتفاع $۴cm$ و شعاع $۳cm$ می‌باشد.

$$V_۲ = \frac{۱}{۳} \times (\pi \times ۳^۲) \times ۴ = \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۹ \times ۴ = \frac{۳۶\pi}{۳} = ۱۲\pi$$

$$V_۱ - V_۲ = ۱۶\pi - ۱۲\pi = ۴\pi$$

۱۵۷ . مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین زیر را حول ضلع AB دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل برابر کدام گزینه است؟



۱) ۹π
۲) ۱۲π
۳) ۱۸π
۴) ۲۷π

پاسخ: گزینه ۱

$$(AC)^۲ = (AB)^۲ + (BC)^۲ \xrightarrow{AB=BC} (AC)^۲ = ۲(AB)^۲$$

$$\rightarrow (۳\sqrt{۲})^۲ = ۲(AB)^۲ \rightarrow ۹ \times ۲ = ۲(AB)^۲ \rightarrow AB = \sqrt{۹} = ۳$$

$$AB = BC = ۳cm$$

از دوران حول AB نیز مخروط به شعاع و قاعده‌ی ۳ به وجود می‌آید.

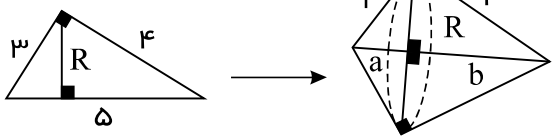
$$V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi r^۲ h}{۳} = \frac{\pi \times ۳ \times ۳ \times ۳}{۳} = ۹\pi$$

۱۵۸ . مثلثی به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ سانتی‌متر را حول ضلع بزرگتر دوران می‌دهیم، حجم جسم حاصل چقدر است؟

۱) $\frac{۲۶\pi}{۵}$
۲) $\frac{۴۸\pi}{۵}$
۳) ۱۰π
۴) ۱۲π

پاسخ: گزینه ۲ مثلث گفته شده قائم‌الزاویه است، چرا که $۵^۲ = ۴^۲ + ۳^۲$. حال این مثلث را حول وتر دوران می‌دهیم. دو مخروط قائم به شعاع R و ارتفاع‌های a و b تشکیل می‌شود.

$$\text{مثلث } S = \frac{۳ \times ۴}{۲} = ۶ = \frac{R \times ۵}{۲} \rightarrow R = \frac{۱۲}{۵}$$



$$\left.\begin{array}{l} \text{مخروط سمت چپ } V = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ a \\ \text{مخروط سمت راست } V = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ b \end{array}\right\} \rightarrow \text{کل } V = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ a + \frac{۱}{۳}\pi R^۲ b$$

$$= \frac{۱}{۳}\pi R^۲ \overbrace{(a+b)}^{۵} = \frac{۵}{۳}\pi R^۲ = \frac{۵}{۳}\pi(\frac{۱۲}{۵})^۲ = \frac{\cancel{۵}^{۱}}{\cancel{۳}_{۱}}\pi \times \frac{\cancel{۱۴۴}^{۴۸}}{\cancel{۲۵}_{۵}} = \frac{۴۸\pi}{۵}$$

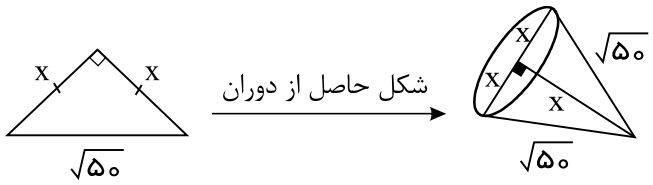
۱۵۹ . وتر یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین $\sqrt{۵۰}$ سانتی‌متر است. این مثلث را حول یکی از اضلاع زاویه‌ی قائمه دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل چند سانتی‌متر مکعب است؟

۱) $\frac{۱۲۵\pi}{۳}$
۲) $\frac{۳۷۵\pi}{۳}$
۳) ۲۲۵π
۴) ۳۷۵π

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

پاسخ: گزینه ۱



$$\rightarrow x^۲ + x^۲ = (\sqrt{۵۰})^۲ \Rightarrow ۲x^۲ = ۵۰ \rightarrow x^۲ = ۲۵ \rightarrow x = ۵cm$$

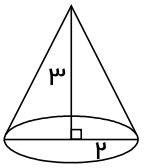
در نتیجه شعاع قاعده‌ی مخروط و ارتفاع مخروط برابر ۵ سانتی‌متر است. پس حجم مخروط برابر است با:

$$\frac{۱}{۳}\pi R^۲ h = \frac{۱}{۳}\pi(۵)^۲ \times ۵ = \frac{۱۲۵}{۳}\pi$$

۱۶۰ . صفحه‌ی کاغذی به شکل مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم $۲cm$ و $۳cm$ را حول ضلع $۳cm$ به اندازه‌ی ۱۸۰° دوران می‌دهیم. حجم شکل به وجود آمده چقدر است؟

۱) ۲π ۲) ۴π ۳) ۶π ۴) π

پاسخ: گزینه ۱ چون صفحه‌ی کاغذ به اندازه‌ی ۱۸۰° دوران یافته است، بنابراین حجم به دست آمده، نصف حجم مخروط است.



شکل $V = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h = \frac{۱}{۶} \times \pi \times (۲)^۲ \times ۳ = \frac{۱۲}{۶}\pi = ۲\pi cm^۳$

۱۶۱ . حجم حاصل از دوران ربع دایره‌ای به شعاع $۲cm$ حول شعاع خود، برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{۳۲\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۸\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۱۶\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۲۰\pi}{۳}$

پاسخ: گزینه ۳

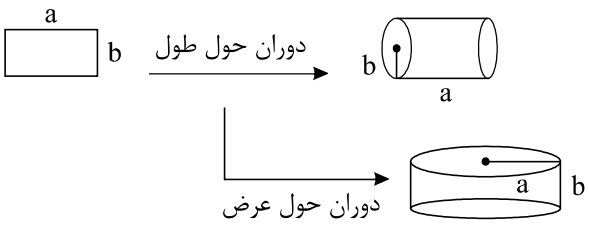
کره $V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳$

نیم‌کره $V = (\frac{۴}{۳}\pi r^۳) \times \frac{۱}{۲} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi \times ۲ \times ۲ \times ۲}{۲} = \frac{۱۶\pi}{۳}$

۱۶۲ . مستطیلی به طول a و عرض b را یکبار حول طول و بار دیگر حول عرض آن دوران می‌دهیم. حجم شکل اول چند برابر حجم شکل دوم است؟

۱) $\frac{a}{b}$ ۲) $\frac{b}{a}$ ۳) $\frac{۱}{a}$ ۴) $\frac{۱}{b}$

پاسخ: گزینه ۲



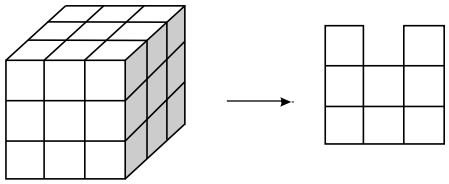
استوانه $V = \pi b^۲ a$

استوانه $V = \pi a^۲ b \rightarrow \frac{\cancel{\pi} \cancel{b^{۱}} \cancel{a}}{\cancel{\pi} \cancel{a^{۱}} \cancel{b}} = \frac{b}{a}$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

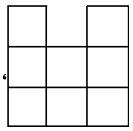
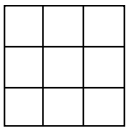
برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۱۶۳ . مکعب زیر از ۲۷ مکعب کوچک و مساوی به ضلع ۱ سانتی متر تشکیل شده است. پنج مکعب از آن طوری برداشتیم که وقتی از روبرو و از راست به آن نگاه می‌کنیم، شکل سمت راست دیده می‌شود. اندازه‌ی سطح شکل باقی‌مانده چند سانتی‌متر مربع است؟



۱) ۵۴ ۲) ۵۸ ۳) ۴۹ ۴) ۶۲

پاسخ: گزینه ۲ اندازه‌ی ضلع مربع کوچک برابر یک سانتی‌متر است. با برداشتن ۵ مکعب سطح‌هایی که به وجود می‌آیند به شکل زیر هستند.

۴ تا از شکل  ، یکی از شکل  که در کف قرار دارد. همچنین ۱۷ تا سطح به صورت □ خواهیم داشت. در مجموع کل سطح شکل جدید برابر است با:

$$(۴ \times ۸) + (۱ \times ۹) + (۱۷ \times ۱) = ۳۲ + ۹ + ۱۷ = ۵۸$$

۱۶۴ . ارتفاع یک مخروط دو برابر شعاع قاعده آن و حجم آن با حجم یک نیم‌کره برابر است. نسبت شعاع نیم‌کره به شعاع قاعده مخروط چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

$$\text{حجم مخروط} = \text{حجم نیم‌کره}$$

$$\frac{۲}{۳}\pi r^۳ = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h \quad , \quad h = ۲R$$

$$\frac{۲}{۳}\pi r^۳ = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ (۲R) \Rightarrow \frac{۲}{۳}\pi r^۳ = \frac{۲}{۳}\pi R^۳ \Rightarrow r = R$$

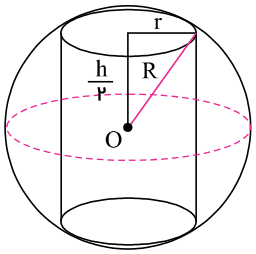
۱۶۵ . در داخل یک کره به شعاع ۵ واحد، استوانه‌ای قائم با سطح جانبی ۴۸π محاط شده است. بیش‌ترین حجم این استوانه چه‌قدر است؟

۱) ۹۶π ۲) ۹۸π ۳) ۱۰۸π ۴) ۱۴۴π

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{cases} S_{\text{جانبی}} = ۲\pi rh = ۴۸\pi \Rightarrow rh = ۲۴ \\ r^۲ + (\frac{h}{۲})^۲ = R^۲ = ۲۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} rh = ۲۴ \Rightarrow \frac{h}{۲} = \frac{۱۲}{r} \Rightarrow \frac{h^۲}{۴} = \frac{۱۴۴}{r^۲} \\ r^۲ + \frac{h^۲}{۴} = ۲۵ \Rightarrow r^۲ + \frac{۱۴۴}{r^۲} = ۲۵ \end{cases} \Rightarrow (r^۲)^۲ - ۲۵r^۲ + ۱۴۴ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^۲ = ۹ \Rightarrow h = ۸ \Rightarrow V = \pi r^۲ h = ۷۲\pi \\ r^۲ = ۱۶ \Rightarrow h = ۶ \Rightarrow V = \pi r^۲ h = ۹۶\pi \end{cases}$$



۱۶۶ . کره‌ای از تمام رأس‌های یک مکعب مستطیل به ابعاد $۲\sqrt{۵}$، ۶ و ۵ گذشته است، سطح این کره چند برابر π است؟

۱) ۶۴ ۲) ۸۱ ۳) ۱۴۴ ۴) ۱۳۶

پاسخ: گزینه ۲ قطر اصلی مکعب مستطیل مفروض نقش قطر کره را ایفا می‌کند و می‌توان چنین نوشت:

$$\text{قطر مکعب‌مستطیل } ۲R \Rightarrow \sqrt{۲۰ + ۳۶ + ۲۵} = ۲R \Rightarrow R = \frac{۹}{۲} \Rightarrow S = ۴\pi R^۲ = ۴ \times \pi \times (\frac{۹}{۲})^۲ = ۸۱\pi$$

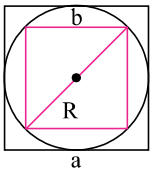
برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

۱۶۷ . کره‌ای در داخل مکعبی محاط و بر مکعب دیگری محیط است. اگر سطح کره $S_۲$ و سطح مکعب‌ها $S_۱$ و $S_۳$ باشد، حاصل کسر $\frac{S_۱+S_۳}{۲S_۲}$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۴}{\pi}$ ۴) $\frac{۸}{\pi}$

پاسخ: گزینه ۳ یادآوری: هرگاه مکعبی در کره‌ای محاط باشد، قطر مکعب برابر قطر کره است و هرگاه مکعبی بر کره‌ای محیط گردد، ضلع مکعب برابر قطر کره است.



$$\left.\begin{array}{l} S_۱=۶a^۲=۶(۲R)^۲=۲۴R^۲ \\ S_۳=۶b^۲ \\ b\sqrt{۳}=۲R \\ S_۲=۴\pi R^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow S_۳=۶(\frac{۲R}{\sqrt{۳}})^۲=۸R^۲ \Rightarrow \frac{S_۱+S_۳}{۲S_۲}=\frac{۳۲R^۲}{۸\pi R^۲}=\frac{۴}{\pi}$$

۱۶۸ . مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ را حول یکی از ضلع‌ها دوران می‌دهیم. حجم حاصل چه‌قدر است؟

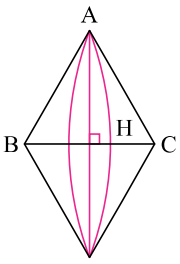
۱) ۱۲π ۲) ۱۶π ۳) ۱۸π ۴) ۲۴π

پاسخ: گزینه ۲ هرگاه مثلث ABC را حول ضلع BC دوران دهیم، A روی دایره‌ای به مرکز H و شعاع AH و در صفحه‌ای عمود بر BC حرکت می‌کند.

بنابراین شکل حاصل، دو مخروط یکسان است که در قاعدهٔ مشترک هستند. یال هر مخروط ضلع مثلث و شعاع قاعدهٔ آن ارتفاع مثلث و ارتفاع آن (BH) نصف ضلع مثلث است.

می‌دانیم حجم مخروط برابر است با $\frac{۱}{۳}$ مساحت قاعده ضربدر ارتفاع آن پس:

یادآوری: در هر مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع نظیر هر ضلع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول ضلع مثلث است.



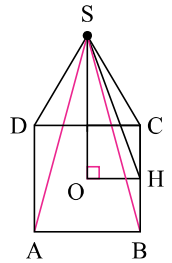
$$\left.\begin{array}{l} V_{کل}=۲\times\frac{۱}{۳}(\pi(AH)^۲)CH \\ AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=۲\sqrt{۳} \\ CH=\frac{۱}{۲}a=۲ \end{array}\right\} \Rightarrow V=۲\times\frac{۱}{۳}\pi(۲\times\sqrt{۳})^۲\times۲=۱۶\pi$$

۱۶۹ . در هرم منتظم مربع‌القاعده‌ای به ضلع قاعده $۲\sqrt{۳}$ واحد، زاویه صفحه هر وجه با صفحه قاعده آن برابر ۶۰° است. حجم هرم چه‌قدر است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۳ چون هرم منتظم است. محور هرم از مرکز قاعده آن می‌گذرد.

(زاویه H، زاویه مسطحه فرجه با قاعده هرم است.)



$$OH=\frac{۱}{۲}AB=\sqrt{۳}, \hat{H}=۶۰^\circ$$
$$S=۳۰^\circ \Rightarrow SH=۲OH=۲\sqrt{۳}$$
$$SO^۲=SH^۲-OH^۲=۱۲-۳=۹ \Rightarrow SO=۳$$

حجم هرم برابر است با $\frac{۱}{۳}$ مساحت قاعده در ارتفاع $V=\frac{۱}{۳}S\cdot h=\frac{۱}{۳}(۲\sqrt{۳})^۲\times۳=۱۲$.

۱۷۰ . شعاع قاعدهٔ یک جعبهٔ استوانه‌ای شکل $۸cm$ و ارتفاع آن $۳cm$ است. چند سانتی‌متر به شعاع یا به ارتفاع اضافه کنیم، تا حجم استوانه، در هر دو حالت به یک اندازه افزایش یابد؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱۶}{۳}$ ۳) هر عددی ۴) $\frac{۷}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲ مقدار افزایش ارتفاع و یا شعاع قاعده را x می‌گیریم بنابراین داریم:

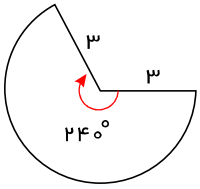
$$(۸+x)^۲\pi\times۳=۸^۲\pi(۳+x) \Rightarrow (۶۴+۱۶x+x^۲)۳\cancel{\pi}=۶۴\cancel{\pi}(۳+x) \Rightarrow ۳x^۲+۴۸x=۶۴x \Rightarrow ۳x^۲-۱۶x=۰ \Rightarrow x(۳x-۱۶)=۰$$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ ۳x = ۱۶ \Rightarrow x = \frac{۱۶}{۳} \end{cases}$$

۱۷۱ . از یک دایرهٔ کاغذی به شعاع $۳cm$، قطاع مقابل را بریده و با آن مخروط می‌سازیم، حجم این مخروط کدام است؟

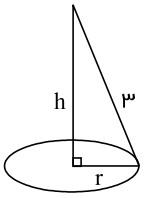


۱) $\frac{۳\sqrt{۵}}{۲}\pi$
۲) $\frac{۴\sqrt{۵}}{۳}\pi$
۳) $۲\sqrt{۵\pi}$
۴) $\frac{۵\sqrt{۵}}{۳}\pi$

پاسخ: گزینه ۲

$$\text{محیط قاعدهٔ مخروط} = \frac{۲۴۰}{۳۶۰}(۲ \times ۳ \times \pi) = ۴\pi$$

پس:



$$۲r\pi = ۴\pi \Rightarrow r = ۲$$
$$h^۲ = ۳^۲ - ۲^۲ \Rightarrow h^۲ = ۹ - ۴ = ۵ \Rightarrow h = \sqrt{۵}$$
$$V = \frac{۱}{۳}(\pi r^۲)h = \frac{۱}{۳} \times \pi \times ۴ \times \sqrt{۵} = \frac{۴\sqrt{۵}\pi}{۳}$$

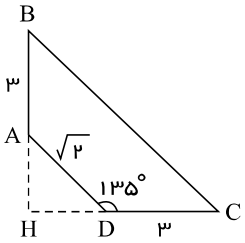
۱۷۲ . یک مخروط دوار (قائم) را با یک صفحه که بر وسط ارتفاع مخروط عمود است، به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. نسبت حجم مخروط کوچک بالا به حجم مخروط ناقص برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۷}$
۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ: گزینه ۳ مخروط توسط یک صفحه به موازات صفحهٔ قاعده قطع شده است پس در مخروط متشابه داریم نسبت حجم مخروط حاصل به مخروط اولیه برابر است با مکعب نسبت تشابه که همان مکعب نسبت ارتفاع‌ها می‌باشد. پس اگر V' حجم مخروط حاصل و V حجم مخروط اولیه باشد داریم:

$$\frac{V'}{V} = (\frac{۱}{۲})^۳ \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow \frac{V'}{V - V'} = \frac{۱}{۸ - ۱} \Rightarrow \frac{V'}{\text{مخروط ناقص } V} = \frac{۱}{۷}$$

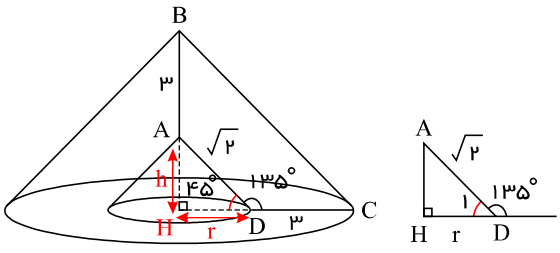
۱۷۳ . شکل زیر را حول ضلع AB دوران می‌دهیم حجم شکل حاصل چقدر است؟



۱) ۶۳π
۲) ۲۱π
۳) $\frac{۶۴\pi}{۳}$
۴) $\frac{۶۳\pi}{۴}$

پاسخ: گزینه ۲ شکل ایجادشده به‌صورت زیر است. اگر شعاع قاعدهٔ مخروط کوچک را r بگیریم با توجه به این‌که:

$$\hat{D}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۱۳۵^\circ = ۴۵^\circ$$



پس $\hat{A} = ۴۵^\circ$ و مثلث $\hat{AHD}$ قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. ضلع مقابل به زاویهٔ ۴۵° در مثلث قائم‌الزاویه $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برابر وتر است. پس:

$$h = r = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \sqrt{۲} = ۱$$

با در نظر گرفتن R و $h_۱$ به‌عنوان شعاع قاعده و ارتفاع مخروط بزرگ و $h_۲$ به‌عنوان ارتفاع مخروط کوچک داریم:

$$R = ۱ + ۳ = ۴ \text{ حاصل و } V = V \text{ مخروط بزرگ} - V \text{ مخروط کوچک} = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h_۱ - \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h_۲ \Rightarrow (\frac{۱}{۳} \times \pi \times ۱۶ \times ۴) - (\frac{۱}{۳} \times \pi \times ۱ \times ۱) = \frac{۶۴}{۳}\pi - \frac{۱}{۳}\pi$$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

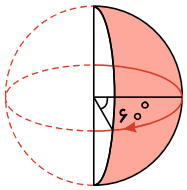
برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

$= \frac{۶۳}{۳}\pi = ۲۱\pi$

۱۷۴ . نیم‌دایره‌ای به قطر $۲۰cm$ را حول قطرش به اندازهٔ ۶۰° دوران می‌دهیم حجم شکل حاصل کدام است؟

۱) ۱۰۰π ۲) $\frac{۲۰۰۰}{۹}\pi$ ۳) $\frac{۱۵۰۰}{۴}\pi$ ۴) ۱۵۰π

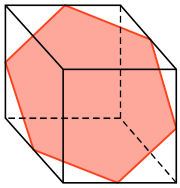
پاسخ: گزینه ۲ شکل حجم ایجاد شده یک قاچ کروی می‌باشد:



$R = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰$

$V = \frac{\alpha}{۳۶۰} \times (\text{حجم کره}) = \frac{۶۰}{۳۶۰} \times (\frac{۴}{۳} \times \pi \times ۱۰^۳) = \frac{۱}{۶} \times \frac{۴}{۳} \times \frac{۵۰۰}{۱۰۰۰} \times \pi = \frac{۲۰۰۰}{۹}\pi$

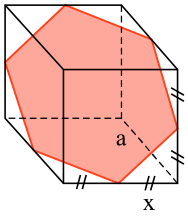
۱۷۵ . مساحت شش‌ضلعی رنگی $۴۸\sqrt{۳}$ و رأس‌های شش‌ضلعی سایه‌خورده وسط یال‌های مکعب هستند. حجم مکعب کدام است؟



۱) ۵۰۰ ۲) ۵۱۲
۳) ۴۸۰ ۴) ۴۹۲

پاسخ: گزینه ۲

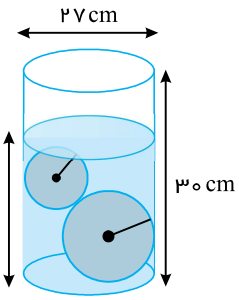
شش‌ضلعی منتظم به ضلع a $S = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲ = ۴۸\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = \frac{۱۶}{۴۸} \times \frac{۲}{۳} = ۳۲$



نصف ضلع مکعب $= x \Rightarrow x^۲ + x^۲ = a^۲ \Rightarrow ۲x^۲ = ۳۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۶ \Rightarrow x^۱ = ۴$

ضلع مکعب $= ۲ \times ۴ = ۸$, $V = ۸^۳ = ۵۱۲$

۱۷۶ . استوانه‌ای که دارای قطر $۲۷cm$ و ارتفاع $۳۰cm$ است، شامل دو کره با شعاع $۶cm$ و $۹cm$ است. کرهٔ بزرگ‌تر در کف استوانه قرار دارد. (طبق شکل) آب درون استوانه ریخته می‌شود به گونه‌ای که فقط دو کره را بپوشاند. حجم آب لازم برابر با کدام گزینه است؟

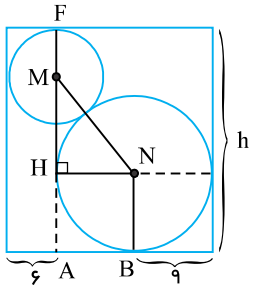


۱) ۳۶۷۲π
۲) ۳۶۶۰π
۳) ۳۳۷۵π
۴) ۳۱۱۴π

پاسخ: گزینه ۴ شعاع قاعدهٔ استوانه $\frac{۲۷}{۲}$ و ارتفاع آب را h فرض می‌کنیم:

برای محاسبهٔ h از جلو تصویر را می‌بینیم:

$R_۱ = ۶$, $R_۲ = ۹$, $h = ?$



$AB = ۲۷ - (۶ + ۹) = ۱۲$ $MN = ۶ + ۹ = ۱۵$

$MH^۲ = ۱۵^۲ - ۱۲^۲ = ۸۱ \Rightarrow MH = ۹$

$h = MF + MH + NB = ۶ + ۹ + ۹ = ۲۴$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

حجم دو کره و آب روی هم برابر است با حجم استوانه‌ای به شعاع $\frac{۲۷}{۲}$ و ارتفاع ۲۴: حجم آب $= V_W$

$$\frac{۴}{۳}\pi \times ۶^۳ + \frac{۴}{۳}\pi \times ۹^۳ + V_W = \pi \times (\frac{۲۷}{۲})^۲ \times ۲۴$$

$$۲۸۸\pi + ۹۷۲\pi + V_W = ۴۳۷۴\pi$$

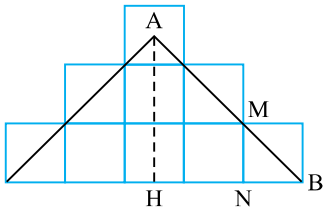
$$\Rightarrow V_W = ۴۳۷۴\pi - ۱۲۶۰\pi \Rightarrow V_W = ۳۱۱۴\pi$$

۱۷۷ . اگر بخواهیم با تراشیدن اطراف یک زیگورات به ارتفاع ۳ آجر خشتی، یک هرم مصری با بیش‌ترین مساحت قاعدهٔ ممکن بسازیم، ارتفاع آن هرم حداکثر برابر چند آجر خشتی می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۲٫۵ ۳) ۳ ۴) $۵ \times (۵ - \frac{\sqrt{۲}}{۲})$

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به شکل روبه‌رو:



باید ارتفاع AH را به دست آوریم. واضح است مثلث AHB با MNB متشابه است و هر دو متساوی‌الساقین هستند، پس : $AH = HB = ۲٫۵$

(برخلاف ظاهر سؤال حل آن خیلی ساده بود! شاید هم من خیلی قشنگ برایتان حل کردم و ساده شد!)

۱۷۸ . برای محاسبهٔ ارتفاع یک زیگورات، تعداد آجرهای اطراف قاعدهٔ آن را شمرده‌ایم، که ۸۰ عدد بود. ارتفاع این زیگورات چند آجر خشتی است؟

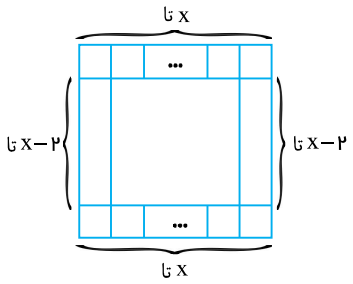
۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) چنین زیگوراتی نداریم.

پاسخ: گزینه ۲ تعداد آجرهای قاعده:

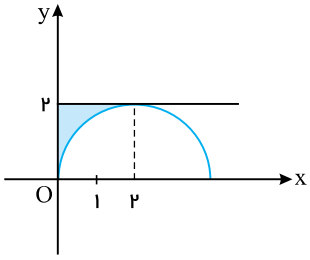
$$x + x + x - ۲ + x - ۲ = ۴x - ۴ = ۸۰ \Rightarrow ۴x = ۸۴ \Rightarrow x = ۲۱$$

پس قاعده ۲۱ × ۲۱ است. حالا باید دید ۲۱ چندمین عدد فرد است؟

ارتفاع ۱۱ است. $\Rightarrow 2n - ۱ = ۲۱ \Rightarrow n = ۱۱$



۱۷۹ . در شکل مقابل، حجم حادث از دوران سطح هاشور زده حول محور OX کدام است؟



۱) ۲π
۲) $\frac{۴\pi}{۳}$
۳) $\frac{۸\pi}{۳}$
۴) ۳π

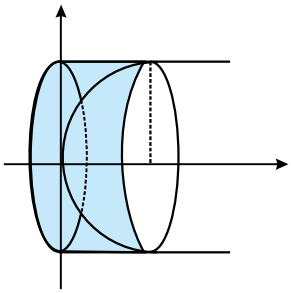
پاسخ: گزینه ۳ یک استوانه منهای یک نیم‌کره است:

$$h = ۲ \quad , \quad R = ۲$$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir

استوانه:



نیم‌کره:

$$V = V_۲ - V_۱ = \pi R^۲ h - \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۳}\pi R^۳$$
$$= \pi \times ۴ \times ۲ - \frac{۲}{۳}\pi \times ۸$$
$$= ۸\pi - \frac{۱۶\pi}{۳} = \frac{۸\pi}{۳}$$

۱۸۰ . صفحه‌ای به فاصلهٔ $۳cm$ از مرکز کره‌ای به شعاع ۵ ، کره را قطع می‌کند. مساحت قاعدهٔ شکل جدا شده از کره چند برابر عدد π است؟

۱) ۴ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینه ۳

$$r^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ = ۱۶ \Rightarrow \boxed{r = ۴}$$
$$S = \pi r^۲ = ۱۶\pi$$

۱۸۱ . مساحت کل مکعبی که داخل کره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر محاط شده باشد، چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۳ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱ در این صورت قطر مکعب با قطر کره برابر است پس:

$$a\sqrt{۳} = ۲ \Rightarrow a = \frac{۲}{\sqrt{۳}} \qquad S = ۶a^۲ = ۶ \times \frac{۴}{۳} = ۸$$

برای دریافت نمونه سوال به سایت عصر آموزش مراجعه نمایید. کلیک کنید www.AsreAmouzesh.ir